GRUNDLINIEN
DER
POLITISCHEN ARITHMETIK

VON

DR. MORITZ KITT.

GRUNDLINIEN
DER
POLITISCHEN ARITHMETIK

ZUM GEBRAUCHE AN
HANDELSAKADEMIEN, HÖHEREN HANDELSLEHRANSTALTEN
UND ZUM SELBSTUNTERRICHTE

BEARBEITET VON

PHIL. DR. MORITZ KITT,
PROFESSOR AN DER HANDELSAKADEMIE IN OLMÜTZ.

I. THEIL:
ZINSESZINS- UND RENTENRECHNUNG.

WIEN 1901 LEIPZIG
CARL GRAESER & CCo. B. G. TEUBNER.

K. und k. Hofbuchdrucker Fr. Winiker & Schickardt, Brünn.

Inhalt des I. Theiles.

Vorwort.

Das vorliegende Büchlein entstammt dem Wunsche des Verfassers, dem Schüler der Handelsakademie (höheren Handelsschule) einen Leitfaden an die Hand zu geben, der es ihm ermöglichen soll, die in der Schule durchgeführten Berechnungen und Ableitungen auch im Buche leicht verfolgen zu können. Die bisher in den Schulen verwendeten, in ihrer Art vortrefflichen Lehrbücher der politischen Arithmetik schienen mir meist an zwei Übelständen zu leiden; einerseits sind sie in der Mehrzahl der Fälle für den Lehrer geschrieben und für den Schüler zu schwer verständlich, anderseits enthalten sie fast durchgehends mehr, als in der Schule bewältigt werden kann. Bei der überaus beschränkten Stundenzahl, die der politischen Arithmetik im Lehrplane der Handelsakademien zugewiesen ist, erschien es mir zweckmäßig, nur jene Capitel der politischen Arithmetik in das Büchlein aufzunehmen, die in der gegebenen Zeit, welche ich zu 2 Stunden wöchentlich voraussetze, gerade durchgearbeitet werden können und das Lehrziel erreichen lassen.

Zur leichteren Handhabung habe ich das Buch in 2 Theile getheilt, deren zweiter die zur raschen Berechnung der Aufgaben bestimmten Tabellen enthält.

Bei Verfassung des vorliegenden Werkchens benützte ich:

Lehrbuch der politischen Arithmetik für höhere Handelsschulen und zum Selbstunterricht von Gustav Rothbaum. Verlag der Pahl'schen Buchhandlung, Zittau i. S., 1896.

Lehrbuch der politischen Arithmetik für höhere Handelsschulen (Handelsakademien) und zum Selbstunterricht von F. S. Holzinger. Vlg. von Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1888.

Tabellen für die Zinseszinsen und Rentenrechnung mit An-

wendung derselben auf Berechnung von Anlehen, Construction von Amortisationsplänen etc. von Simon Spitzer. Verlag von C. Gerolds Sohn, Wien, 1897.

Die Sterblichkeitserfahrungen unter den Rentenversicherten etc. von Dr. B. Schmerler. Selbstverlag des Verfassers, Berlin, 1893.

Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra von Hans Hartl. Verlag von J. Fritsche, Reichenberg, 1894 (2. Auflage 1899).

Siebenstellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 bis 108.000 etc. 24. Ausgabe von Dr. Ludwig Schrön. Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1900.

Viele Beispiele der Zinseszins- und Zeitrentenrechnung sind, zum Theil ohne Abänderung, der Aufgabensammlung von Hartl entnommen, wozu Hr. Prof. Hartl mir bereitwilligst die Erlaubnis ertheilte.

Außerdem fühle ich mich zu besonderem Danke verpflichtet Herrn Franz Zimmermann, Procurist und Generalinspector der Versicherungsgesellschaft „Donau“ in Wien, sowie Herrn Josef Schwerzek, Chef der mathematischen Abtheilung der genannten Gesellschaft. Herrn Schwerzek verdanke ich viele mündliche Aufklärungen auf dem Gebiete der Lebensversicherung und eine im zweiten Theile des Buches gegebene Tabelle.

Olmütz, im September 1901.

Dr. Moritz Kitt.

Zinseszinsrechnung.

Bei einfacher Verzinsung eines Capitals von C Kronen betragen die Interessen nach einer bestimmten Zahl von Jahren, beispielsweise nach n Jahren $\frac{C\,p\,n}{100}$, wobei p die Procente bedeutet, zu welchen die Verzinsung erfolgte. Wesentlich unterschieden hievon ist jene Art der Verzinsung, welche man als Zinseszinsrechnung bezeichet. Das Wort „Zinseszins" drückt diesen Unterschied bereits deutlich aus, indem es besagt, dass bei dieser Art der Berechnung auch die Zinsen eines Capitals der Verzinsung unterliegen. Ein Capital erscheint auf Zinseszins angelegt, wenn nach bestimmten Zeiträumen die Interessen mit dem Capital vereinigt als neues Capital der Verzinsung zugeführt werden. Die folgende

Berechnung des Endwertes eines auf Zinseszins angelegten Capitals, jenes Wertes, den das Capital nach einer bestimmten Zeit erreicht, wird das Wesen der Zinseszinsrechnung deutlich erkennen lassen.

Es sei C das auf Zinseszins angelegte Capital,
p die der Rechnung zugrunde liegenden Procente,
n die Anzahl der Jahre. (Es ist ganzjährige Verzinsung vorausgesetzt.)

Während des ersten Jahres wird das Capital C an Interessen $\frac{C\,p}{100}$ tragen, also sammt den Interessen den Wert $C + \frac{C\,p}{100} = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ erreicht haben. Im nächsten Jahre unterliegt nun dieser Wert $C\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ als neues Capital der Verzinsung

und wird an Interessen

$$\frac{C\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot p}{100} \text{ tragen.}$$

Das anfängliche Capital C hat daher nach 2 Jahren den Wert $C\left(1+\frac{p}{100}\right)+\frac{C\left(1+\frac{p}{100}\right)p}{100}=C\left(1+\frac{p}{100}\right)\times$ $\times\left(1+\frac{p}{100}\right)=C\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ erreicht.

Der Factor $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ wird der Einfachheit halber gewöhnlich mit v bezeichnet und „Aufzinsungsfactor" genannt.

$C+\frac{C\,p}{100}=C\left(1+\frac{p}{100}\right)=C\,v$ Wert des auf Zinseszins angelegten Capitals am Ende des ersten Jahres.

$C\,v+\frac{C\,v\,p}{100}=C\,v\left(1+\frac{p}{100}\right)=C\,v^2$ Wert des auf Zinseszins angelegten Capitals am Ende des zweiten Jahres.

$C\,v^2+\frac{C\,v^2\,p}{100}=C\,v^2\left(1+\frac{p}{100}\right)=C\,v^3$ Wert des auf Zinseszins angelegten Capitals am Ende des dritten Jahres.

$C\,v^3+\frac{C\,v^3\,p}{100}=C\,v^3\left(1+\frac{p}{100}\right)=C\,v^4$ Wert des auf Zinseszins angelegten Capitals am Ende des vierten Jahres.

$C\,v^{n-1}+\frac{C\,v^{n-1}\,p}{100}=C\,v^{n-1}\left(1+\frac{p}{100}\right)=C\,v^n$ Wert des auf Zinseszins angelegten Capitals am Ende des n^{ten} Jahres.

Der Endwert E eines auf Zinseszins angelegten Capitals ist demnach

$$E=C\,v^n.$$

Beispiele zur Übung.

1. Ein Capital von 4500 Kronen wird vom 1. Jänner 1892 an auf Zinseszins angelegt, welchen Wert wird es am 1. Jänner 1920 erreicht haben, wenn die Verzinsung ganzjährig zu 4% erfolgt.

$E = ?$ | $E = C v^n$
$C = 4500$ | $\log E = \log C + n \,.\, \log v$*)
$v = 1{\cdot}04$ | $= 3{\cdot}6532125 + 0{\cdot}4769335$
$n = 28$ | $= 4{\cdot}1301460$
$E = 13494{\cdot}16$ Kronen.

2. Eine Sparcassa berechnet bei ganzjähriger Capitalisierung 4% Zinseszins, wie viel wird jemand am 1. Jänner 1918 beheben können, wenn er am 1. Jänner *1900* 500 Kronen und am 1. Jänner *1904* 875 Kronen in die Sparcassa einlegte?

Die am 1. Jänner 1900 einbezahlten 500 Kronen werden bis 1. Jänner 1918 den Wert $E_1 = 500 \,.\, 1{\cdot}04^{18}$ erreichen, während die Einlage von 875 Kronen auf den Endwert $E_2 = 875 \,.\, 1{\cdot}04^{14}$ anwachsen wird.

Am 1. Jänner 1918 können somit $E_1 + E_2$ Kronen behoben werden

$$\log E_1 = 2{\cdot}6989700 \qquad \log E_2 = 2{\cdot}9420081$$
$$0{\cdot}3066001 \qquad 0{\cdot}2384668$$
$$\overline{3{\cdot}0055701} \qquad \overline{3{\cdot}1804749}$$
$$E_1 = 1012{\cdot}91 \qquad E_2 = 1515{\cdot}22$$
$$E = 2528{\cdot}13 \text{ Kronen.}$$

3. Zu welchem Betrage wachsen 2000 Kronen in 18 Jahren bei 5% Zinseszins an?

4. Welchen Betrag wird jemand am 1. Jänner 1925 beheben können, der an eine Bank drei Einzahlungen leistete? Die erste erfolgte am 1. Jänner 1902 und betrug 1312 Kronen; die beiden andern zu je 650 Kronen erfolgten am 1. Jänner 1905 und am 1. Jänner 1912. $3^3/_4$% ganzjährige Verzinsung.

5. Welchen Wert würden 10 Kronen erreicht haben, die seit Beginn unserer Zeitrechnung bis 1. Jänner 1900 zu 3% Zinseszins angelegen hätten?

Bei allen diesen Beispielen ist vorausgesetzt, dass die Verzinsung ganzjährig geschehe. Die Berechnung gestaltet sich etwas anders bei halbjähriger oder vierteljähriger Verzinsung.

Es sei wieder C das zu p % durch n Jahre auf Zinseszins

*) Zur Erleichterung der Berechnung dienen Tabellen, in welchen die Logarithmen von v für verschiedene Werte von p zusammengestellt sind. Eine solche Tabelle ist im zweiten Theile des Büchleins enthalten, sie umfasst die Logarithmen von v für $p = {}^1/_4, {}^1/_2, {}^3/_4 \ldots\ldots 10$%.

angelegte Capital und die Verzinsung geschähe halbjährig (semestral), dann ist die Anzahl der Zinsperioden nun nicht mehr n, sondern $2n$, jede derselben ein halbes Jahr. Das Capital C wird am Ende der ersten Zinsperiode an Interessen

$\frac{C \cdot p \cdot \frac{1}{2}}{100} = \frac{C\,p}{200}$ getragen haben, somit sammt den Interessen den Wert $C\left(1 + \frac{p}{200}\right)$ erlangt haben. Der Aufzinsungsfactor für halbjährige Verzinsung v_2 wird daher $v_2 = \left(1 + \frac{p}{200}\right)$ und der Endwert des Capitals $E = C\,v_2{}^{2n}$.

Ebenso finden wir bei vierteljährlicher Verzinsung

$v_4 = \left(1 + \frac{p}{400}\right)$ und $E = C\,v_4{}^{4n}$ u. s. f.

6. Zu welchem Betrage wächst ein Capital von 4000 Kronen zu 6% Zinseszins in 12 Jahren an, wenn die Verzinsung halbjährig geschieht*)?

$E = ?$	$E = C\,v_2{}^{2n}$
$C = 4000$	$\log E = \log C + 2n \cdot \log v_2$
$n = 12;\ 2n = 24$	$= 3{\cdot}6020600 + 0{\cdot}3080933$
$v_2 = 1 + \frac{6}{200} = 1{\cdot}03$	$= 3{\cdot}9101533$
	$E = 8131{\cdot}18$ Kronen;

würde dasselbe Capital unter sonst gleichen Bedingungen ganzjährig capitalisiert werden, so wäre

$$E = C \cdot v^n \text{ wobei } v = 1{\cdot}06 \text{ und } n = 12$$

$$\begin{aligned} \text{und } \log E &= \log C + n \cdot \log v \\ &= 3{\cdot}6020600 + 0{\cdot}3036704_1 \\ &= 3{\cdot}9057304 \\ E &= 8048{\cdot}79 \text{ Kronen;} \end{aligned}$$

man ersieht daraus, dass unter sonst gleichen Umständen die halbjährige Capitalisierung vortheilhafter ist.

---

*) In allen Beispielen, wo ½-, ¼ . . . jährige Verzinsung angenommen ist, beziehen sich die angegebenen Procente auf ein Jahr (pro anno), nicht auf eine Zinsperiode.

7. Welchen Wert wird ein zu 4% Zinseszins angelegtes Capital von 5500 Kronen nach 30 Jahren erreicht haben, wenn die Verzinsung

a) halbjährig,
b) vierteljährig,
c) ganzjährig

geschieht, und welche Verzinsung erscheint als die vortheilhafteste?

8. Jemand legt zu Anfang des Jahres 1905 ein Capital von 3850 Kronen in eine Bank, welche ihm das Geld halbjährig mit 3% Zinseszinsen verzinst. Vom 1. Jänner 1912 an gewährt die Bank 4% Zinseszins, jedoch bei ganzjähriger Verzinsung. Welche Summe kann am 1. Jänner 1920 behoben werden?

9. Welchen Endwert erreichen zu 3% Zinseszins angelegte 8950 Kronen nach 6 Jahren, wenn die Zinsen monatlich zum Capital geschlagen werden?

10. Jemand macht in eine Sparcassa 3 Einzahlungen,

die erste am 1. Jänner 1900 zu 3650 Kronen,
die zweite am 1. Jänner 1906 zu 4800 Kronen,
die dritte am 1. Jänner 1915 zu 5730 Kronen,

die Sparcasse verzinst das eingelegte Geld mit 3% halbjährig bis zum 1. Jänner 1920, von da ab ganzjährig mit $3\frac{1}{2}$%; wie viel kann am 1. Jänner 1925 behoben werden? [24.406·94 Kronen.]

Die Gleichung $E = C v^n$ enthält 4 Größen: E, C, v, n, deren jede berechnet werden kann, wenn die drei anderen dem Werte nach gegeben sind. Handelt es sich darum, bei den gegebenen Größen E, v, n den Wert des Capitals C zu bestimmen, jenes Capitals, welches zu p % Zinseszins angelegt nach n Jahren den Wert E erreicht hat, so ergibt sich derselbe zu

$$C = \frac{E}{v^n}$$

und wir nennen denselben den

Barwert, welchen ein gegebenes Endcapital vor n Jahren hatte. Wenn jemand etwa nach n Jahren eine Schuld von E Kronen zu bezahlen hätte und er würde dieser Verpflichtung sofort nachkommen, so wird er offenbar zur Abtragung dieser Schuld jetzt einen geringeren Betrag aufwenden können als nach n Jahren, eben jene Summe, die zu p % auf Zinseszins angelegt nach n Jahren auf E Kronen anwächst.

11. Wie groß ist der gegenwärtige Wert (Barwert) einer erst nach 20 Jahren zu leistenden Zahlung von 30.500 Kronen unter der Voraussetzung, dass die Verzinsung des vorderhand noch unbekannten Capitals mit 4% ganzjährig geschehen könne?

$C = ?$ $\qquad$ $C = \frac{E}{v^n}$

$E = 30.500$ $\qquad$ $\log C = \log E - n \,.\, \log v$

$n = 20$ $\qquad$ $= 4{\cdot}4842998 - 0{\cdot}3406668$

$v = 1{\cdot}04$ $\qquad$ $= 4{\cdot}1436330$

$C = 13919{\cdot}80$ Kronen.

12. Jemand zahlte am 1. Jänner 1912 einen Geldbetrag an ein Geschäftsunternehmen, welches ihm das Geld mit 8% ganzjährig capitalisierte; als er am 1. Jänner 1920 das Geld sammt den aufgelaufenen Zinseszinsen zurückgezahlt erhielt, bekam er 36.000 Kronen; wie viel hatte er einbezahlt?

13. Jemand hat am 1. Jänner 1925 eine Schuld von 9000 Kronen zu begleichen und kann dieselbe durch 2 gleich große Ratenzahlungen, welche zu Anfang der Jahre 1905 und 1915 geleistet werden sollen, tilgen. Wie groß müssen dieselben sein, wenn der Berechnung 4% bei ganzjähriger Capitalisierung zugrunde liegen? [2451·47 Kronen.]

14. Welchen Barwert hatte ein Capital von 257.500 Kronen vor 20 Jahren, wenn die Capitalisierung mit 4% vierteljährlich geschah?

Wäre in der Gleichung $E = C v^n$, E, C und v gegeben, würde es sich um die Bestimmung der Zeit handeln, welche nothwendig ist, damit ein Capital von C Kronen auf Zinseszins angelegt den Wert E erreiche, so finden wir zunächst

$$v^n = \frac{E}{C}.$$

Die Unbekannte „n“ erscheint hier als Potenzexponent.

Derartige Exponentialgleichungen einfacher Art können durch Logarithmieren derselben gelöst werden. Es ist

$$n \,.\, \log v = \log E - \log C$$

$$n = \frac{\log E - \log C}{\log v}$$

In der Mehrzahl der Fälle erhalten wir bei Bestimmung

des n keine ganze Zahl; wir begnügen uns dann, den Bruchtheil der Jahre in einigen Decimalstellen anzugeben oder denselben in Monaten und Tagen auszudrücken. Die Formel $E = C\,v^n$ gilt mathematisch auch dann, wenn n keine ganze Zahl, sondern z. B. ein unechter Bruch ist; doch rechnet man in der Praxis nicht in dieser Weise, sondern berechnet Zinseszinsen nur für ganze Zinsperioden, während man für den etwa vorhandenen Bruchtheil einer Zinsperiode einfache Zinsen rechnet. Der Unterschied beider Arten der Berechnung ist nicht erheblich, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

15. Es sei der Endwert zu bestimmen, welchen ein Capital von 2500 Kronen zu 3% ganzjährig, nach 10 Jahren, 3 Monaten, 6 Tagen erreicht.

a) Mathematische Berechnung:

$E = C\,v^n$ $\qquad n = 10$ Jahre, 3 Monate, 6 Tage
$= 10$ Jahre, $3\frac{1}{5}$ Monate
$= 10\frac{16}{60}$ Jahre
$= 10 \cdot 26$ Jahre

$$\log E = \log C + n \,.\, \log v$$
$$= 3{\cdot}3979400 + 0{\cdot}13179544$$
$$= 3{\cdot}52973544$$
$$E = 3386{\cdot}38 \text{ Kronen};$$

b) praktische Berechnung:

$E = C\,v^n$ $\qquad n = 10$

$$\log E = \log C + n \,.\, \log v$$
$$= 3{\cdot}3979400 + 0{\cdot}1283722$$
$$= 3{\cdot}5263122$$

$E = 3359{\cdot}79$ Kronen; hiezu kommen noch die Interessen dieses Capitals für drei Monate und sechs Tage, oder $\frac{4}{15}$ Jahre, d. i.

$$\frac{C \,.\, p \,.\, \frac{4}{15}}{100} = 3359{\cdot}79 : 125 = 26{\cdot}87 \text{ Kronen.}$$

Der Endwert wird demnach $E = 3386{\cdot}66$ und ist gegen den früher gefundenen Wert nur um 28 *h* verschieden.

16. Nach wie viel Jahren erreicht bei ganzjährig 4%iger Verzinsung ein Capital von 3680 Kronen den Wert von 76.545 Kronen?

17. Jemand erlegte bei einer Sparcassa, welche die Einlagen mit 3% halbjährig verzinst, ein Capital von 8420 Kronen, wann fand diese Einzahlung statt, wenn am 1. Jänner 1918 14.390·95 Kronen behoben werden könnten?

18. In welcher Zeit werden bei vierteljährlicher Capitalisierung zu 4% 3960 Kronen auf 7194·12 Kronen angewachsen sein?

19. Eine Schuld von 18.000 Kronen, welche am 1. Jänner 1930 fällig ist, soll durch eine Zahlung von 10.000 Kronen getilgt werden; wann ist diese Zahlung zu leisten, wenn eine Verzinsung zu 4% ganzjährig angenommen wird?

20. In welcher Zeit verdoppelt sich ein zu 4% ganzjährig angelegtes Capital?

$E = C \cdot v^n$; soll sich das Capital verdoppeln, dann ist $E = 2C$

$2C = C \cdot v^n$

$$v^n = 2; \; n = \frac{\log 2}{\log v}$$

in diesem speciellen Falle ist $n = \dfrac{0 \cdot 3010300}{0 \cdot 01703334} = 17^2/_3$ Jahre;

in gleicher Weise findet man die Zeit, in welcher sich ein Capital verdreifacht u. s. f., ähnlich bei halbjähriger oder vierteljähriger Verzinsung.

Um die Frage zu lösen, zu wie viel Procenten ein Capital C auf Zinseszins angelegt sein müsste, um nach n Jahren den Endwert E zu erreichen, ist die Gleichung $E = Cv^n$ zunächst nach v aufzulösen

$$\log E = \log C + n \cdot \log v$$
$$n \log v = \log E - \log C$$
$$\log v = \frac{\log E - \log C}{n}$$

man findet num. log v und damit auch p.

21. Zu wie viel Procent ganzjährig müssten 4800 Kronen angelegt werden, um nach 19 Jahren auf 9228 Kronen anzuwachsen?

$$\log v = \frac{3 \cdot 9651076 - 3 \cdot 6812412}{19}$$
$$= 0 \cdot 01494034$$

$$v = 1{\cdot}035 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$
$$p = 3^{1}/_{2}{}^{0}/_{0}$$

22. Ein Capital von 6300 Kronen ist bei ganzjähriger Verzinsung in 10 Jahren auf 9325·54 Kronen angewachsen; zu wieviel Procenten war es angelegt?

23. Jemand zahlte in eine Sparcassa zu Anfang des Jahres *1900* 2350 Kronen und behob, nachdem ihm das Geld ganzjährig verzinst wurde, zu Anfang des Jahres *1909* 3344·78 Kronen; wieviel Procente berechnete die Sparcassa?

24. Die Rohbilanz der Volkszählung vom 31. December 1900 ergab für die Stadt Wien eine Bevölkerungszahl von 1,635.647 Personen, entsprechend einer Zunahme der Bevölkerung um 293.750 Personen gegen das Resultat der letzten Zählung, die vor 10 Jahren stattgefunden hatte. Wie viel Procente beträgt die jährliche Bevölkerungszunahme, wenn dieselbe nach Art der Zinseszinsrechnung fortschreitend gedacht wird?

25. Jemand hat nach testamentarischer Bestimmung am 1. Jänner 1905 einen Betrag von 10.500 Kronen zu beheben; er verkaufte diese Forderung am 1. Jänner 1900 um 8605·22 Kronen; wie viele Procente wurden berechnet, wenn vierteljährige Verzinsung vorausgesetzt wird?

Wie früher (Seite 4) gezeigt wurde, erscheint es unter sonst gleichen Umständen vortheilhafter, die Capitalisierung halbjährig zu bewirken als ganzjährig; es wird also ein Capital, welches zu $p^{0}/_{0}$ durch n Jahre ganzjährig verzinst wird, nicht denselben Wert erreichen, den es zu $\frac{p}{2}{}^{0}/_{0}$ halbjährig oder $\frac{p}{4}{}^{0}/_{0}$ vierteljährlich in der gleichen Zeit erreichen würde. Wollen wir untersuchen, unter welchen Umständen das Capital bei halbjähriger Verzinsung in derselben Zeit denselben Wert erlangen würde, den es bei ganzjähriger Verzinsung bekommt, dann ist offenbar die Verzinsung nach

$$C\left(1 + \frac{p}{200}\right)^{2n} \text{ und auch } C\left(1 + \frac{p}{400}\right)^{4n}$$

in diesem Falle nicht mehr richtig, sie ist nur bedingungsweise

(relativ) richtig, weshalb man diese Art der Verzinsung auch relative Verzinsung nennt.

Um bei halbjähriger Verzinsung in derselben Zeit denselben Wert wie bei ganzjähriger Verzinsung zu erreichen, müssen die Procente entsprechend gewählt werden, dann kann es gelingen, zu diesem gleichen (conformen) Endwert zu gelangen. Diese Verzinsung bezeichnet man als conforme. Nennen wir die vorderhand noch unbekannten Procente x so besteht die Bedingung

$$C\left(1+\frac{x}{100}\right)^{2n}=C\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}$$

$$\text{daraus ist } \left(1+\frac{x}{100}\right)^{2}=1+\frac{p}{100}$$

$$1+\frac{x}{100}=\sqrt{v}$$

$$x=100\,(\sqrt{v}-1)$$

ähnlich ist bei vierteljährlicher Verzinsung

$$C\left(1+\frac{x}{100}\right)^{4n}=C\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}$$

$$x=100\,(\sqrt[4]{v}-1)$$

26. Wie hoch wächst ein Capital von 4000 Kronen zu 6% in 12 Jahren an, bei a) relativ, b) conform semestraler Capitalisierung der Zinsen; wie groß ist der conforme Zinsfuß (Procente)

$$\text{a) } E=C\left(1+\frac{p}{200}\right)^{2n}$$

$$\log E=\log C+2n\log\left(1+\frac{p}{200}\right)$$

$$=3{\cdot}6020600+0{\cdot}30809328$$

$$=3{\cdot}91015328$$

$$E=8131{\cdot}16 \text{ Kronen;}$$

b) bei conform semestraler Verzinsung muss das Capital denselben Endwert erreichen, wie wenn es zu 6% durch 12 Jahre ganzjährig angelegen hätte, also

$$E=Cv^{n} \text{ wobei } v=1{\cdot}06,\; n=12$$

$$\log E = 3{\cdot}6020600 + 0{\cdot}30367044$$
$$= 3{\cdot}9057304$$
$$E = 8048{\cdot}79 \text{ Kronen};$$

die entsprechenden Procente ergeben sich nach

$$x = 100\,(\sqrt{v} - 1) \text{ zu } 2{\cdot}956$$

und es ist $E = 4000 \,.\, 1{\cdot}02956^{24}$

$$\log E = 3{\cdot}6020600 + 24 \,.\, 0{\cdot}01265166$$
$$= 3{\cdot}9056998$$
$$E = 8048{\cdot}22.$$

(Die Ungenauigkeit rührt daher, dass x nur auf 3 Decimalstellen bestimmt wurde.)

27. Zu welchem Betrage wachsen 2000 Kronen in 18 Jahren bei 5% ganzjähriger Verzinsung an, wenn dieselbe relativ semestral und wenn sie conform semestral geschieht?

Bei sämmtlichen bisher angeführten Beispielen wurde vorausgesetzt, dass die Capitalisierung derart geschah, dass die Zinsen jedesmal am Schlusse einer Zinsperiode zum Capital zugefügt wurden, eine Verzinsung, welche man als „decursiv" bezeichnet zum Unterschiede von der „anticipativen" Verzinsung, bei welcher die Interessen jedesmal zu Beginn einer Zinsperiode in Rechnung gezogen werden. Letztere Art der Verzinsung wird besonders bei der Berechnung von Anlehen in Anwendung gebracht, ihr Wesen beruht auf der folgenden Erwägung: Leiht sich jemand ein Capital von C Kronen auf 1 Jahr aus, so bekommt er bei anticipativer Verzinsung nicht das Capital C ausbezahlt, sondern die Interessen werden im vorhinein in Abzug gebracht; diese betragen $\frac{Cp}{100}$ und der die Anleihe Machende erhält nur $C - \frac{Cp}{100}$ Kronen, wofür er aber am Schlusse des Jahres das Capital C voll rückzuzahlen hat. Die Frage nach dem Endwert eines Capitals bei anticipativer Verzinsung ist demnach auf folgende Art zu lösen:

$C - \frac{Cp}{100} = C\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ Kronen erreichen nach einem Jahr den Wert C.

$\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ setze man der Einfachheit halber $= w$ Aufzinsungsfactor für anticipative Verzinsung.

Dann erreichen Cw Kronen nach 1 Jahr den Wert C und wir finden durch einfache Schlussrechnung

$$Cw : C = C : x$$

$x = \frac{C^2}{Cw} = \frac{C}{w}$; dass C Kronen nach einem Jahre den Wert $\frac{C}{w}$ haben werden, unterliegen diese $\frac{C}{w}$ Kronen am Ende des ersten Jahres nun weiter der anticipativen Verzinsung, so finden wir auf gleiche Weise ihren Wert am Ende des zweiten Jahres aus

$$C : \frac{C}{w} = \frac{C}{w} : x; \quad \text{zu } \frac{C^2}{Cw^2} = \frac{C}{w^2}.$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens gibt uns für das dritte Jahr $\frac{C}{w^3}$ und endlich den Wert nach n Jahren

$$E = \frac{C}{w^n}.$$

Ebenso wie in der Formel für decursive Verzinsung $E = Cv^n$ sind auch hier vier Größen E, C, w, n vorhanden, deren jede Gegenstand der Aufsuchung sein kann. Es ist unschwer die bereits durchgeführten Beispiele für die anticipative Verzinsung zurechtzulegen, zwei Beispiele mögen hier Platz finden.

28. Jemand leiht sich ein nach 15 Jahren fälliges Capital von 5832 Kronen; aus, wieviel wird er ausbezahlt erhalten, wenn 4% bei anticipativer Verzinsung angenommen werden?

$$C = ?$$
$$E = 5832$$
$$w = 1 - \frac{p}{100} = 1 - 0{\cdot}04 = 0{\cdot}96$$
$$n = 15$$
$$C = Ew^n$$
$$\log C = \log E + n \,.\, \log w$$
$$= 3{\cdot}7658175 + 15\,(0{\cdot}9822712 - 1)$$

$= 3{\cdot}4998855$

$C = 3161{\cdot}44$ Kronen.

29. Welchen Endwert erreicht ein Capital von 3850 Kronen in 20 Jahren a) bei anticipativ, b) decursiv ganzjähriger 5%iger Verzinsung?

a) $E = \dfrac{3850}{0{\cdot}95^{20}}$

$\log E = 3{\cdot}5854607$
$\quad - 0{\cdot}5544720 + 1$
$\log E = 4{\cdot}0309887$
$E = 10739{\cdot}61$ Kronen

b) $E = 3850 \,.\, 1{\cdot}05^{20}$

$\log E = 3{\cdot}5854607$
$\quad + 0{\cdot}4237860$
$\log E = 4{\cdot}0092467$
$E = 10215{\cdot}20$ Kronen.

Endwert alljährlicher Zahlungen.

Wird durch n Jahre hindurch am Anfange eines jeden Jahres ein stets gleichbleibender Betrag r (Rate) in eine Bank einbezahlt und liegen alle diese Beträge auf Zinseszins an, so wird jeder dieser Beträge nach n Jahren einen gewissen Endwert erlangt haben und das Capital, welches die Bank nach Ablauf der n Jahre ausbezahlen kann, wird, wie leicht ersichtlich ist, der Summe aller dieser Endwerte entsprechen. Wir unterscheiden hiebei zwei Fälle (I. und II.), je nachdem der Auszahlungstermin zu Anfang oder zu Ende des n^{ten} Jahres angenommen wird.

I.

Die Ausbezahlung des Endcapitals erfolgt am Anfange des n^{ten} Jahres. Die am Anfange des ersten Jahres einbezahlte Rate wird mit allen anderen Raten am Anfange des n^{ten} Jahres behoben, das n^{te} Jahr ist demnach noch nicht verflossen, sondern nur volle $n - 1$ Jahre und die erste Rate wird den Wert $r\, v^{n-1}$ (vgl. Seite 2) erreicht haben. Die zu Anfang des zweiten Jahres geleistete Einzahlung (Rate) wird um ein Jahr weniger lang auf Zinseszins anliegen, demnach den Endwert $r\, v^{n-2}$ erreicht haben u. s. f. Wir finden:

Endwert der ersten Rate . . . . $r\, v^{n-1}$
Endwert der zweiten Rate . . . $r\, v^{n-2}$
Endwert der dritten Rate . . . . $r\, v^{n-3}$
Endwert der n^{ten} Rate . . . . . r, denn diese wird

am Anfang des n^{ten} Jahres einbezahlt und behoben, kann sich daher nicht verzinsen *).

Die Summe aller dieser Endwerte:

$$E = r\,v^{n-1} + r\,v^{n-2} + r\,v^{n-3} + \ldots + r\,v + r$$
$$E = r\,(v^{n-1} + v^{n-2} + v^{n-3} + \ldots + v + 1)\,^{**})$$
$$E = r\,.\,\frac{v^n - 1}{v - 1}$$

30. Jemand erlegt durch 25 Jahre am Anfange eines jeden Jahres eine Einzahlung von je 325 Kronen; welchen Betrag kann er am Anfang des 25. Jahres beheben? 4% ganzjährige decursive Verzinsung.

$E = ?$

$r = 325 \qquad E = r\,\frac{v^n - 1}{v - 1}$

$v = 1{\cdot}04 \quad \log E = \log r + \log (v^n - 1)\,^{***}) - \log (v - 1)$

---

*) Ein derartiger Fall ist zwar praktisch nicht vorauszusetzen, aber hier nothwendig, um den Endwert feststellen zu können. Die Übungsbeispiele auf Seite 18 werden dies klarlegen.

**) Der Ausdruck in der Klammer stellt eine fallende geometrische Reihe mit dem Quotienten v vor. Wir finden, wie bekannt, die Summe S dieser geometrischen Reihe durch folgendes Verfahren:

$S = v^{n-1} + v^{n-2} + v^{n-3} + \ldots\ldots + v + 1$; wir multiplicieren die Gleichung mit v und erhalten

$S\,v = v^n + v^{n-1} + v^{n-2} + \ldots\ldots + v^2 + v$; subtrahiert man die obere Gleichung von dieser, so entsteht:

$v\,S - S = v^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 1$

$S\,(v - 1) = v^n - 1$

$$S = \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

***) Nebenrechnung: $\log (v^n - 1)$

$$\begin{aligned}\log v^n &= n\,.\,\log v\\ &= 25\,.\,\log 1{\cdot}04\\ &= 0{\cdot}4258335\\ v^n &= num\ 0{\cdot}4258335\\ &= 2{\cdot}66584\\ v^n - 1 &= 1{\cdot}66584\\ \log (v^n - 1) &= 0{\cdot}2216333.\end{aligned}$$

Zur Erleichterung der Rechnung dienen Tabellen, in denen die Werte von v^n für verschiedene Procente und Werte von n entwickelt

$n = 25 \qquad = 2{\cdot}5118834 + 0{\cdot}2216333 - (0{\cdot}6020600 - 2)$

$= 4{\cdot}1314567$

$E = 13.534{\cdot}95$ Kronen.

31. Ein Vater hinterlegt für seinen minderjährigen Sohn bei einer Rentenanstalt zu Anfang jedes Jahres einen Betrag von 200 Kronen, den ersten am 1. Jänner 1902; welche Summe kann die Rentenanstalt dem Sohne am 1. Jänner 1935 ausbezahlen? $3^1/_2{}^0/_0$ ganzjährige decursive Verzinsung.

Auch die Gleichung $E = r\,\dfrac{v^n - 1}{v - 1}$ kann nach einer der vier Größen E, r, v, n aufgelöst werden, wenn die anderen drei gegeben sind. So ist z. B.

$$r = \frac{E\,(v - 1)}{v^n - 1}$$

ferner $E\,v - E = r\,v^n - r$

$$r\,v^n = E\,v - E + r$$

$$v^n = \frac{E\,v - E + r}{r}$$

$$n \log v = \log\,[E\,v - E + r] - \log r$$

$$n = \frac{\log\,[E\,v - E + r] - \log r}{\log v}$$

Nach v ist die Gleichung $E = r\,\dfrac{v^n - 1}{v - 1}$ n^{ten} Grades und deren Lösung ist nur in besonderen Fällen leicht durchführbar.

32. Jemand will vom 1. Jänner 1902 an gerechnet am 1. Jänner *1930* 30.000 Kronen beziehen; welchen Betrag hat er jährlich an jedem 1. Jänner zu entrichten, wenn die Verzinsung seiner Einzahlungen zu $4^0/_0$ geschieht?

$r = ?$

$E = 30.000$

$v = 1{\cdot}04$

$n = 29$ **)

$$r = \frac{E\,(v - 1)}{v^n - 1}$$

$\log r = \log 1200 - \log\,(1{\cdot}04^{29} - 1)$

$= 3{\cdot}0791812 - 0{\cdot}3260595$

$= 2{\cdot}7531217$

$r = 566{\cdot}40$ Kronen.

---

sind. Einige solcher Tabellen sind im zweiten Theile des Büchleins gegeben, sie sollen später bei der Rentenrechnung Verwendung finden.

**) Denn die erste Einzahlung wird bis 1. Jänner 1930 verzinst auf $r\,v^{28}$, die letzte ist r. Alle zusammen

33. Jemand hat am 1. Jänner 1915 eine Schuld von 6932 Kronen zu bezahlen, welche er durch jährliche Ratenzahlungen, deren erste am 1. Jänner 1900 erfolgt ist, abzahlen kann. Wie groß wird die jährlich zu zahlende Rate sein müssen? 4%. [317·60 Kronen.]

34. Jemand will am 1. Jänner 1930 eine Summe von 100.000 Kronen beheben und zahlt zu diesem Zwecke jährlich zu Beginn jedes Jahres 2567·40 Kronen in eine Bank, die das Geld mit $3\frac{1}{2}\%$ verzinst; wann musste die erste Einzahlung erfolgen? [Zu Beginn des Jahres 1906.]

35. Jemand legt vom 1. Jänner 1888 angefangen jedesmal am 1. Jänner einen Betrag von 300 Kronen in eine Sparcassa, welche bei halbjähriger Verzinsung 4% zahlte. Er starb am 12. Jänner 1901; wie viel konnten seine Erben beheben?

$$\left[C = r\,\frac{v_2^{27} - 1}{v_2 - 1} \text{ (warum?) 3413·77 Kronen.}\right]$$

36. Jemand soll am 1. Jänner 1905 einen Betrag von 8750 Kronen zahlen und will statt dessen zehn gleiche Jahresraten, zahlbar am 1. Jänner 1896, 1897 bis 1905 zahlen; wie groß ist eine solche Rate? $4\frac{1}{2}\%$. [712·06 Kronen.]

37. Jemand legt vom 1. Jänner 1893 bis 1. Jänner 1903 allvierteljährlich einen Betrag von 85 Kronen in eine Bank, welche bei vierteljähriger Verzinsung 4% Zinseszins pro anno berechnet. Welchen Betrag kann er unmittelbar nach der letzten Einzahlung beheben? [4281·88 Kronen.]

II.

Die Ausbezahlung des Endcapitals erfolgt am Schlusse des n^{ten} Jahres.

Die erste Ratenzahlung liegt somit durch volle n Jahre hindurch auf Zinseszins an und hat am Schlusse des n^{ten} Jahres den Wert $r\,v^n$ erreicht. Wir finden

Endwert der ersten Rate . . . . $r\,v^n$
Endwert der zweiten Rate . . . $r\,v^{n-1}$
Endwert der dritten Rate. . . . $r\,v^{n-2}$
Endwert der n^{ten} Rate . . . . . $r\,v$, denn sie wird am

$$E = r\,(v^{28} + v^{27} + \ldots + v + 1)$$
$$= r \cdot \frac{v^{29} - 1}{v - 1}$$

Anfang des n^{ten} Jahres einbezahlt, am Ende desselben Jahres behoben, unterliegt 1 Jahr der Verzinsung.

$$E = r\,v^n + r\,v^{n-1} + r\,v^{n-2} + \ldots + r\,v^2 + r\,v$$
$$= r\,v\,(v^{n-1} + v^{n-2} + v^{n-3} + \ldots + v + 1)$$

$E = r\,v\,\dfrac{v^n - 1}{v - 1}$; das Resultat erscheint gegenüber I. mit v multipliciert. Dies ist auch leicht einzusehen, denn in I. wurde das Endcapital 1 Jahr früher behoben, hier konnte es noch ein volles Jahr sich verzinsen.

38. Jemand zahlt jährlich zu Anfang jedes Jahres in eine Bank 375 Kronen ein; welchen Betrag wird er am Ende des 50. Jahres beheben können, wenn die Bank die Einlagen mit 4% ganzjährig verzinst? [59·540·16 Kronen.]

39. Wie viel muss jemand jährlich zu Beginn jedes Jahres in eine Bank einzahlen, um am Ende des 25. Jahres 10.000 Kronen beheben zu können? $3\frac{1}{2}$%. [248·06 Kronen.]

40. Jemand legte vom 1. Jänner 1888 an zu Beginn jedes Jahres einen Betrag von 150 Kronen in eine Bank, welche das Geld mit $3\frac{1}{2}$% Zinseszins verzinst. Er starb am 6. März 1900; welchen Betrag konnten seine Erben am Ende des Jahres 1900 beheben? [2501·55 Kronen.]

Die bisher abgeleiteten Formeln genügen auch zur Lösung der folgenden Frage:

Es seien r die durch n Jahre zu Beginn eines jeden Jahres eingezahlten Raten; welchen Endwert werden diese Einzahlungen *a*) am Anfange, *b*) am Ende des $(n + m)^{ten}$ Jahres erreicht haben?

a) Wie aus I. (Seite 13) ersichtlich, erreichen die Ratenzahlungen bis zum Anfang des n^{ten} Jahres den Wert

$$E = r\,\frac{v^n - 1}{v - 1}$$

da dieses Capital jedoch erst am Anfang des $(n + m)^{ten}$ Jahres behoben wird, unterliegt es noch durch m Jahre der Verzinsung und wird somit

$$\mathrm{E} = E\,v^m = r\,v^m\,\frac{v^n - 1}{v - 1};$$

b) auf gleiche Weise finden wir aus II. $E = r\,v\,\dfrac{v^n - 1}{v - 1}$

den Endwert bis Ende des n^{ten} Jahres und da dessen Verzinsung weiter noch durch m Jahre erfolgt

$$E = r\, v^{m+1}\, \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

oder auch unmittelbar aus a) durch Multiplication mit v.

Einige Beispiele mögen zur Übung dienen.

41. Jemand legt durch 15 Jahre zu Beginn eines jeden Jahres einen Betrag von 325 Kronen in eine Sparcassa ein, welche 5% Zinseszins zahlt. Welchen Betrag kann er am Ende des 20. Jahres beheben?

$E = ?$ $\quad E = r\, v^{m+1} \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1}$
$r = 325$
$v = 1{\cdot}05$
$m = 5$
$n = 15$

$$\log E = \log r + (m + 1) . \log v + \log (v^n - 1) - \log (v - 1)$$
$$= 2{\cdot}5118834 + 0{\cdot}1271358 + 0{\cdot}0329925 - (0{\cdot}6989700 - 2)$$
$$= 3{\cdot}9730417$$
$$E = 9398{\cdot}13 \text{ Kronen.}$$

42. Jemand legt vom 1. Jänner 1881 angefangen bis zum 1. Jänner 1905 jedesmal am 1. Jänner 250 Kronen in eine Bank, welche $3^3/_4$% Zinseszins zahlt. Wie viel kann er am 1. Jänner 1915 beheben?

43. Jemand will am 1. Jänner 1915 ein Capital von 12.500 Kronen beheben und legt zu diesem Zwecke vom 1. Jänner 1891 angefangen durch 10 Jahre immer am 1. Jänner einen gleichen Betrag in eine Bank, welche $3^1/_2$% Zinseszins zahlt. Wie groß wird die jährliche Einzahlung sein müssen?

44. Jemand hat am 1. Jänner 1905 einen Betrag von 8500 Kronen zu zahlen und will statt dessen acht gleiche Jahresraten, zahlbar am 1. Jänner der Jahre 1895—1902, zahlen. Wie groß wird eine Rate sein, wenn $4^1/_2$% Zinseszins gerechnet werden?

45. Welcher Betrag könnte in Beispiel 37 (Seite 16) am 1. Juli 1905 behoben werden?

Zeitrentenrechnung.

Unter Rente versteht man einen in bestimmten Zeiträumen an eine Person zur Auszahlung gelangenden Geldbetrag, den sich dieselbe durch Einzahlung eines bestimmten Capitals an eine Rentenanstalt erwirbt. Es ist dies gewissermaßen der entgegengesetzte Fall der früher durchgeführten Rechnungen, denn während wir dort nach Einzahlung gleicher Raten zu einem bestimmten Termin ein Capital beheben konnten, zahlen wir hier umgekehrt ein Capital ein, um durch eine bestimmte Zahl von Zeitabschnitten eine Rate (hier Rente genannt) beziehen zu können. Das Recht auf den Bezug einer solchen Rente kann man, wie eben erwähnt, durch einmalige Einzahlung eines Capitals an eine Rentenanstalt erwerben, dieses Capital bezeichnet man als den Barwert oder die Mise der Rente; oder aber man kann auch jährliche Theilzahlungen, Prämien, an die Rentenanstalt entrichten, nach deren Einzahlung man in den Genuss der Rente tritt. Die Rente wird dem Besitzer derselben in bestimmten Zeitabschnitten ausgefolgt. Wir betrachten hier nur solche Renten, die jährlich zur Auszahlung gelangen, also Jahresrenten; ferner werden wir zu unterscheiden haben zwischen Renten, deren Ausbezahlung zu Beginn oder zu Ende eines Jahres erfolgt, zwischen anticipativen und decursiven Renten. Nur von letzteren soll hier die Rede sein; es ist unschwer, die an diesen durchgeführten Berechnungen auf jene zu übertragen. Die Mannigfaltigkeit der Rentenrechnung ist damit noch nicht erschöpft. Hier soll nur die Berechnung jener Renten Platz finden, die von dem Besitzer durch eine Reihe von Jahren bezogen werden, der sogenannten „Zeitrenten"; dagegen sollen die Renten, welche während der ganzen Lebensdauer des Besitzers demselben jährlich ausbezahlt werden, die „Leibrenten" oder „Lebensrenten", den Gegenstand eines späteren Capitels bilden. Schließlich sei noch erwähnt, dass, allerdings seltener, auch Renten zur Auszahlung gelangen, die von Jahr zu Jahr in arithmetischer oder geometrischer Reihe steigen oder fallen.

Um den Barwert einer Zeitrente, die Mise derselben, zu berechnen, gehen wir von der Erwägung aus, dass die Renten-

anstalt offenbar keine Renten ausbezahlen wird, deren Gesammtwert den Wert der geleisteten Einzahlung übersteigt, wir nehmen, an, dass die Leistung der die Rente erwerbenden Person und die Gegenleistung der Rentenanstalt einander gleich seien, dass der Wert der Einzahlung dem Werte der Rente gleichkomme.*) Um die beiden Werte vergleichen zu können, müssen wir sie jedoch, wie leicht einzusehen, auf den gleichen Zeitpunkt beziehen. Als solchen können wir den Anfang oder das Ende eines beliebigen Jahres wählen, am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn wir den Zeitpunkt der Einzahlung der Mise annehmen.

Es sei M die zu suchende Mise,
r die am Ende jedes Jahres zur Auszahlung kommende Rente,
n die Anzahl der Jahre, durch welche die Rente bezogen wird

$$v = \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Wird die Mise zu Beginn eines Jahres entrichtet, dann erfolgt die Ausbezahlung der ersten Rente r am Schlusse desselben Jahres. Hat die erste Rente dann den Wert r, so wird ihr Wert, bezogen auf den Zeitpunkt der Einzahlung der Mise, ein geringerer sein, nämlich $\frac{r}{v}$, weil ja r durch 1 Jahr zurückbezogen wird $\left(\text{und es ist } \frac{r}{v} \cdot v = r\right)$; ebenso wird die zweite Rente r vor zwei Jahren den Wert $\frac{r}{v^2}$ gehabt haben müssen u. s. f.

Wir finden somit die „Barwerte" (vgl. Seite 5) der einzelnen Rentenzahlungen zu:

$$\frac{r}{v}$$
$$\frac{r}{v^2}$$
$$\frac{r}{v^3}$$
$$\vdots$$
$$\frac{r}{v^n}$$

*) Dabei berücksichtigen wir den Gewinn der Rentenanstalt nicht.

Die Summe aller dieser „Barwerte" ist die auf den Zeitpunkt der Einzahlung zurückbezogene Leistung der Rentenanstalt; die Einzahlung hat zu derselben Zeit den Wert M. Sollen beide Werte gleich sein, dann besteht die Gleichung

$$M = \frac{r}{v} + \frac{r}{v^2} + \frac{r}{v^3} + \ldots\ldots \frac{r}{v^n};$$

durch Multiplication mit v^n entsteht

$$Mv^n = rv^{n-1} + rv^{n-2} + rv^{n-3} + \ldots\ldots + r$$
$$Mv^n = r\,(v^{n-1} + v^{n-2} + v^{n-3} + \ldots\ldots + 1)$$
$$Mv^n = r \,.\, \frac{v^n - 1}{v - 1}$$
$$M = \frac{r}{v^n} \,.\, \frac{v^n - 1}{v - 1}\ ^{*)}$$

sind die übrigen Größen gegeben, so findet man aus dieser Formel auch

$$r = \frac{Mv^n\,(v-1)}{(v^n - 1)}$$

Beispiele:

46. Jemand will durch eine einmalige Einzahlung eine durch 20 Jahre laufende decursive (nachschüssige) Jahresrente von 800 Kronen erwerben. Wie groß muss die Einzahlung sein wenn $5^0/_0$ Zinseszinsen gerechnet werden?

---

*) Man hätte auch einen anderen Zeitpunkt zum Vergleich der Werte wählen können, einen beliebigen, z. B. den Anfang des 5. Jahres nach der Einzahlung, so finden wir leicht an der Hand der ohneweiters verständlichen Aufzeichnung

Einzahlung M |——|——|——|——‖——|——|—— .... u. s. f.

1. Jahr r 2. Jahr r 3. Jahr r 4. Jahr r 5. Jahr r 6. Jahr r 7. Jahr

$$Mv^4 = rv^3 + rv^2 + rv + r + \frac{r}{v} + \frac{r}{v^2} + \ldots\ldots + \frac{r}{v^{n-4}}$$

$$Mv^4 \,.\, v^{n-4} = rv^3 \,.\, v^{n-4} + rv^2 \,.\, v^{n-4} + rv\,v^{n-4} + rv^{n-4} + \frac{rv^{n-4}}{v} \text{ u. s. f.}$$

$$Mv^n = rv^{n-1} + rv^{n-2} + rv^{n-3} + \ldots\ldots + rv + r$$

$$Mv^n = r\,\frac{v^n - 1}{v - 1}$$

$$M = \frac{r}{v^n} \,.\, \frac{v^n - 1}{v - 1} \text{ wie früher.}$$

$M = ?$ $\quad M = \frac{r}{v^n} \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1} \quad \frac{r}{v-1} = 16000$

$r = 800$

$n = 20 \quad \log M = \log (v^n - 1) + \log 16000 - n \log v$

$v = 1\cdot05 \quad = 0\cdot2183517 + 4\cdot2041200 - 0\cdot4237860$

$= 3\cdot9986857$

$M = 9969\cdot78$ Kronen.

47. Jemand erlegt bei einer Rentenanstalt ein Capital von 10.000 Kronen, wofür er eine durch 25 Jahre laufende decursive Rente zu beziehen wünscht; wie groß kann dieselbe sein, wenn 5% Zinseszinsen angenommen werden?

$r = ? \quad r = \frac{M v^n (v - 1)}{v^n - 1} \quad M (v - 1) = 500$

$M = 10.000$

$n = 25$

$v = 1\cdot05 \quad \log r = \log 500 + n \, . \log v - \log (v^n - 1)$

$= 2\cdot6989700 + 0\cdot5297325 - 0\cdot3777359$

$= 2\cdot8509666$

$r = 709\cdot52$ Kronen.

48. Jemand wünscht eine durch dreißig Jahre laufende decursive Rente von 500 Kronen zu beziehen; welchen Betrag hat er hiefür auf einmal zu entrichten? $3^1/_2\%$. [9196·02 Kronen.]

49. Welchen Betrag muss man an eine Rentenanstalt auf einmal bezahlen, um eine jährliche decursive Rente von 800 Kronen durch 25 Jahre beziehen zu können? 4%. [12.497·66 Kronen].

Es kann auch der Fall eintreten, dass jemand nach Einzahlung der Mise nicht unmittelbar die Rente beziehen will, sondern deren Bezug auf eine spätere Zeit aufschiebt, oder dass er die Rente zu irgendeiner Zeit verkauft. Derartige Aufgaben sind mit Hilfe der bisher abgeleiteten Formeln lösbar; wie deren Lösung erfolgt, soll an zwei speciellen Beispielen gezeigt werden.

50. Jemand soll nach 6 Jahren in den Bezug einer durch 18 Jahre laufenden vorschüssigen Jahresrente treten. Da er gegenwärtig Geld braucht, verkauft er die Rente um 12.000 Kronen. Wie groß ist die Rente, wenn der Berechnung des Kaufpreises 5% Zinseszinsen zugrunde gelegt wurden?

$r = ?$

$n = 18$

$v = 1\cdot05$

Angenommen, die Rente würde sofort nach Einzahlung der Mise zur Ausgabe gelangen, so hätte diese Mise den Wert haben müssen:

$$M = \frac{r}{v^{18}} \cdot \frac{v^{18} - 1}{v - 1};$$

da jedoch die Mise schon 5 Jahre vorher einbezahlt werden sollte, damit die Rente dann nach 5 Jahren bezogen werden konnte, so ist ihr Wert vor 5 Jahren

$$M_1 = \frac{M}{v^5},$$

also $M_1 = \frac{r}{v^{23}} \cdot \frac{v^{18} - 1}{v - 1}$, welcher Wert dem Verkaufspreis entspricht

$$12000 = \frac{r}{v^{23}} \cdot \frac{v^{18} - 1}{v - 1} \qquad \text{und} \qquad r = \frac{12000 \cdot v^{23} \cdot v - 1}{v^{18} - 1}$$

$$12000 \cdot (v - 1) = 600$$

$$\begin{aligned} \log r &= \log 600 + 23 \log v - \log (v^{18} - 1) \\ &= 2{\cdot}7781513 + 0{\cdot}4873539 - 0{\cdot}1481768 \\ &= 3{\cdot}1173284 \\ r &= 1310{\cdot}17 \text{ Kronen.} \end{aligned}$$

51. Jemand will durch eine einmalige, am 1. Jänner 1905 zu erfolgende Einzahlung eine vom 1. Jänner 1940 durch 15 Jahre laufende, am Anfange jedes Jahres zu beziehende Jahresrente von 750 Kronen erwerben. Wie groß muss die Einzahlung sein, wenn $4\frac{1}{4}\%$ Zinseszins gerechnet werden?

$$r = 750$$
$$n = 15$$
$$v = 1{\cdot}0425$$

Wird die Rente unmittelbar nach Einzahlung der Mise bezogen, so findet man

$$M = r + \frac{r}{v} + \frac{r}{v^2} + \ldots\ldots + \frac{r}{v^{14}}$$

$$M v^{14} = r\,(v^{14} + v^{13} + v^{12} + \ldots\ldots + 1)$$

$$M v^{14} = r \cdot \frac{v^{15} - 1}{v - 1}$$

$$M = \frac{r}{v^{14}} \cdot \frac{v^{15} - 1}{v - 1};$$

da jedoch die Einzahlung M_1 nicht am 1. Jänner 1940 erfolgte, sondern bereits volle 35 Jahre vorher, so konnte sie geringer sein

$$M_1 = \frac{M}{v^{35}} = \frac{r}{v^{49}} \cdot \frac{v^{15} - 1}{v - 1}$$

$$\log M_1 = \log r + \log (v^{15} - 1) - 49 \log v - \log (v - 1)$$
$$= 2{\cdot}8750613 + (0{\cdot}9380141 - 1) - 0{\cdot}8857269 - (0{\cdot}6283889 - 2)$$
$$= 3{\cdot}2989596$$
$$M_1 = 1990{\cdot}49 \text{ Kronen.}$$

Wie früher erwähnt wurde, kann das Recht auf den Bezug einer Rente auch durch Prämienzahlungen erworben werden, nach deren Ableistung der Bezug der Rente erfolgt. Zur Feststellung der Größe einer solchen Prämie geht man von demselben Grundsatze aus wie bei der Auffindung der Mise, nämlich Wert der Prämienzahlung = Wert der Rente, bezogen auf den gleichen Zeitpunkt. Es sei P die Prämie, welche am Anfange jedes Jahres durch m Jahre an eine Rentenanstalt zu bezahlen ist, und r die Rente, deren Ausbezahlung am Schlusse jedes Jahres durch n Jahre erfolgt. Die erste Rente werde am Ende desjenigen Jahres ausbezahlt, in welchem keine Prämienzahlung mehr erfolgt, also am Ende des $(m + 1)^{ten}$ Jahres

$$v = \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Beziehen wir die Geldbeträge auf das Ende des m^{ten} Jahres, dann ist nach Seite 16 der Wert der Prämienzahlungen zu dieser Zeit

$$E = P \, . \, v \, . \, \frac{v^m - 1}{v - 1},$$

der Wert der Rente nach Seite 21

$$M = \frac{r}{v^n} \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1},$$

beide Werte sind einander gleich

$$Pv \, \frac{v^m - 1}{v - 1} = \frac{r}{v^n} \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

$$Pv \, (v^m - 1) = \frac{r}{v^n} \, . \, (v^n - 1)$$

daraus $P = \frac{r}{v^{n+1}} \cdot \frac{v^n - 1}{v^m - 1}$

52. Welche Prämie muss man durch 15 Jahre zu Anfang eines jeden Jahres an eine Rentenanstalt zahlen, um die folgenden 20 Jahre eine decursive Rente von 550 Kronen beziehen zu können? $4\frac{1}{2}\%$.

$P = ?$

$r = 550$ $\qquad P = \frac{r}{v^{n+1}} \cdot \frac{v^n - 1}{v^m - 1}$

$m = 15$

$n = 20$ $\quad \log P = \log r + \log (v^{20} - 1) - 21 \log v - \log (v^{15} - 1) =$

$v = 1{\cdot}045$ $\quad 2{\cdot}7403627 + 0{\cdot}1497455 - 0{\cdot}4014421 - (0{\cdot}9709416 - 1)$

$= 2{\cdot}5177245$

$P = 329{\cdot}40$ Kronen.

53. Jemand zahlt an eine Versicherungsgesellschaft durch 20 Jahre am Beginne jedes Jahres eine Prämie von 600 Kronen; welche Rente wird er durch 25 Jahre am Ende jedes Jahres beziehen können? 5%. [1478·05 Kronen.]

Es kann vorkommen, dass die Verzinsung der einbezahlten Prämien zu einem anderen Zinsfuß geschieht als die Verzinsung der Renten. Bezeichnet man die Procente, zu welchen die Prämien verzinst werden, mit p, die der Renten q, beziehungsweise die Aufzinsungsfactoren mit v und u, dann wäre nach Seite 24:

$$Pv \cdot \frac{v^m - 1}{v - 1} = \frac{r}{u^n} \cdot \frac{u^n - 1}{u - 1}$$

und $$P = \frac{r\,(u^n - 1)\,(v - 1)}{v \cdot u^n\,(v^m - 1)\,(u - 1)}$$

Vermischte Beispiele über Rentenrechnung.

54. Jemand versicherte sich am 1. Jänner 1893 in der Art auf 10.000 Kronen, dass diese Summe am Ende des 20. Jahres an ihn selbst oder im Falle seines Ablebens sofort nach seinem Tode an seine Erben bezahlt werde. Dafür verpflichtet er sich, vom 1. Jänner 1893 angefangen, alljährlich eine Prämie von 524 Kronen einzuzahlen. Wie groß ist bei 4% Zinseszins *a*) der Gewinn der Versicherungsgesellschaft, wenn der Versicherte das Ende des 20. Versicherungsjahres erlebt? *b*) Wie groß ist ihr Verlust, wenn er am 1. Juli 1903 stirbt?

ad a) Wenn der Versicherte das Ende des 20. Versicherungsjahres erlebt, so hat er mittlerweile 20 jährliche Zahlungen von 524 Kronen geleistet, deren Wert bis Ende des 20. Jahres

$$E = r v \frac{v^n - 1}{v - 1} \quad \text{wobei } r = 524,\ v = 1{\cdot}04,\ n = 20$$

$$\frac{r v}{v - 1} = 13624$$

$$\begin{aligned} \log E &= \log 13624 + \log (v^{20} - 1) \\ &= 4{\cdot}1343046 + 0{\cdot}0759555 \\ &= 4{\cdot}2102601 \\ E &= 16227{\cdot}80 \text{ Kronen} \end{aligned}$$

Die Versicherungs-
gesellschaft zahlt 10000·— Kronen
ihr Gewinn ist 6227·80 Kronen.

ad b) Stirbt der Versicherte am 1. Juli 1903, dann hat er bis 1. Jänner 1903 11 Prämien à 524 Kronen einbezahlt, deren Wert bis 1. Jänner 1903

$$E = r \frac{v^{11} - 1}{v - 1} \qquad \frac{r}{v - 1} = 13100$$

$$\begin{aligned} \log E &= \log 13100 + \log (v^{11} - 1) \\ &= 4{\cdot}1172713 + (0{\cdot}7319512 - 1) \\ &= 3{\cdot}8492225 \end{aligned}$$

$E = 7066{\cdot}80$ Kronen, dazu die einfachen Zinsen bis 1. Juli 1903 . . 141·34

7208·14 Kronen Leistung des Versicherten,
10000·— Kronen Leistung der Anstalt

2791·86 Kronen Verlust der Versicherungsgesellschaft.

55. Jemand hat durch 10 Jahre eine gegenwärtig beginnende decursive Rente von 600 Kronen zu beziehen. Er verzichtet jedoch darauf und will statt dessen erst nach 12 Jahren eine durch 15 Jahre laufende decursive Rente beziehen, wie groß wird dieselbe sein, wenn $4^1/_2\%$ Zinseszins gerechnet werden?

56. Jemand hat vom 1. Jänner 1900 an eine durch 20 Jahre laufende nachschüssige Rente von 800 Kronen zu beziehen; und verkauft diese Rente am 1. Jänner 1894. Wie hoch ist der Verkaufspreis, wenn 4% Zinseszins gerechnet werden?

57. Jemand versichert sich auf 20.000 Kronen, welche im Ablebensfalle sofort an seine Erben ausbezahlt werden sollen

und verpflichtet sich dafür, jährlich zu Beginn jedes Jahres eine Prämie von 615 Kronen zu zahlen. Wie groß ist der Verlust der Versicherungsanstalt, wenn er unmittelbar nach Erlag der 15. Prämie stirbt, und wenn 4% Zinseszins berechnet werden?

58. Jemand versichert sein Leben mit 10.000 Kronen nach folgendem Tarif: Er zahlt 25 Jahresprämien, und zwar in Perioden von 5 zu 5 Jahren abnehmend. In der ersten Periode beträgt die Jahresprämie 42 Kronen, in der zweiten 37, in der dritten 31·30, vierten 22·90 und in der fünften 11·60 Kronen per 1000 Kronen Versicherungssumme. Wie groß ist der Endwert sämmtlicher Prämienzahlungen unmittelbar nach Zahlung der letzten, wenn dieselben mit 4% verzinseszinst werden? [13.240 Kronen.]

Annuitäten und Tilgungspläne.

Annuitäten sind jährlich zu zahlende gleichbleibende Beträge, die bei der Berechnung von Anlehen in Anwendung kommen. Wenn eine Bank ein Anlehen an irgendein Unternehmen ausbezahlt, so muss dieses Anlehen nach einer festgesetzten Zeit der Bank zurückbezahlt werden, es müssen aber auch die Zinsen, welche dieses Anlehen der Bank getragen hätte, ihr vergütet werden, die Bank verlangt nicht allein die Tilgung oder Amortisation des Anlehens, sondern auch die Tilgung (Rückbezahlung) der Zinsen. Diese Tilgung eines Capitals sammt Zinsen geschieht durch jährlich zu leistende gleichbleibende Geldbeträge, die man Annuitäten nennt.

Sei A die Annuität, welche durch n Jahre am Schlusse jedes Jahres bezahlt wird, um ein Capital C sammt den bis zum Ende des n^{ten} Jahres aufgelaufenen Zinseszinsen zu tilgen. So ist der Wert aller bezahlten Annuitäten

$$E = A \,.\, \frac{v^n - 1}{v - 1} \text{ (vgl. S. 13);}$$

das entliehene Capital C hat nach n Jahren den Wert $C\,v^n$: soll dieser Wert durch die Annuitätenzahlung getilgt (amortisiert) sein, so ist

$$C\,v^n - A\,.\,\frac{v^n - 1}{v - 1} = o$$

und man findet aus dieser sogenannten „Amortisationsgleichung“ die jährlich zu zahlende Annuität

$$A = \frac{C\,v^n\,(v - 1)}{v^n - 1}.$$

59. Jemand nimmt bei einer Sparcassa auf sein Grundstück ein Anlehen von 6000 Kronen mit der Verpflichtung, dasselbe in 18 Jahren zurückerstattet zu haben. Wie groß ist die Annuität, wenn die Sparcassa 4% Zinseszins berechnet?

$A = ?$
$C = 6000$
$v = 1{\cdot}04$
$n = 18$

$$A = \frac{C\,v^{18}\,(v - 1)}{v^{18} - 1} \qquad C\,(v - 1) = 240$$

$$\begin{aligned} \log A &= \log 240 + 18 \log v - \log (v^{18} - 1) \\ &= 2{\cdot}3802112 + 0{\cdot}3066001 - 0{\cdot}0110695 \\ &= 2{\cdot}6757418 \\ A &= 473{\cdot}96 \text{ Kronen.} \end{aligned}$$

60. Welches Capital wird durch eine Annuität von 1471·64 Kronen in 20 Jahren sammt Zinseszinsen getilgt werden können? 4%. [20.000 Kronen.]

61. Ein Anlehen von 150.500 Kronen soll durch eine Annuität von 8467·39 Kronen bei 5% Zinseszins getilgt werden; durch wie viele Jahre ist die Annuität zu zahlen?

Um den Stand der Capitalsabtragung (Tilgung) zu verschiedenen Zeitpunkten feststellen zu können, dienen die **Tilgungspläne**. Es soll ein Capital von C Kronen durch die am Schlusse jedes Jahres gezahlte Annuität A in n Jahren sammt den Zinseszinsen getilgt werden. Wird die Annuität am Ende des 1. Jahres gezahlt, so wird mit dieser Zahlung ein Theil des Capitals, sowie auch die während dieses einen Jahres aufgelaufenen Zinsen abgetragen werden müssen. Diese während des Jahres aufgelaufenen Zinsen betragen $\frac{C\,p}{100}$, somit wird $A - \frac{C\,p}{100} = x$ der im ersten Jahre zur Tilgung des Capitals verwendete Theil der Annuität sein. Vom Capital bleibt dann noch übrig $C - x$, der Stand der Tilgung am Ende des ersten Jahres ist dann der folgende:

Annuität $= A$

[redacted]

Zinsen des Capitals	Capitalsabtragung	verbleibendes Capital
$\frac{C\,p}{100}$	x_1	$C - x_1$;

jenen Theil der Annuität, welcher zur Tilgung des Capitals verwendet werden kann, bezeichnet man als „Capitalamortisationsquote“.

Im zweiten Jahre wird das noch zu tilgende Capital (die noch vom Vorjahre verbleibende Schuld) $C - x_1$ an Zinsen tragen:

$$(C - x_1)\,\frac{p}{100}$$

von der Annuität kann zur Tilgung des Capitals verwendet werden

$$A - (C - x_1)\,\frac{p}{100} = x_2$$

vom Capital verbleibt noch $(C - x_1 - x_2)$.

Der Tilgungsplan für alle n Jahre würde die nachstehende Form annehmen:

Annuität = A.

Jahr	Zinsen	Capital-amortisations-quote	Verbleibende Schuld
1	$\frac{C\,p}{100}$	x_1	$C - x_1$
2	$(C - x_1)\,\frac{p}{100}$	x_2	$C - x_1 - x_2$
3	$(C - x_1 - x_2)\,\frac{p}{100}$	x_3	$C - x_1 - x_2 - x_3$
4	⋮	⋮	⋮
5	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$(C - x_1 - x_2 - \ldots x_{n-1})\frac{p}{100}$	x_n	$C - x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_n$

Die Summe aller Capitalamortisationsquoten muss das abzuzahlende Capital C ergeben, die verbleibende Schuld im letzten Jahre muss „Null“ werden, dies gibt uns auch ein Mittel an die Hand die Richtigkeit des aufgestellten Tilgungsplanes zu erkennen.

62. Ein Capital von 550.000 Kronen soll nach 25 Jahren sammt Zinseszinsen getilgt sein; man construiere den Tilgungsplan. [5% Zinseszinsen, Zahlung der Annuität am Schlusse jedes Jahres.]

$A = ?$

$C = 550000$

$v = 1{\cdot}05$

$n = 25$

$$A = \frac{C\,v^n\,(v-1)}{v^n - 1}$$

$$C\,.\,(v-1) = 27500$$

$$\begin{aligned}\log A &= \log 27500 + 25 \log 1{\cdot}05 - \log (1{\cdot}05^{25} - 1)\\ &= 4{\cdot}4393327 + 0{\cdot}5297325 - 0{\cdot}3777350\\ &= 4{\cdot}5913302\\ A &= 39023{\cdot}85 \text{ Kronen.}\end{aligned}$$

Annuität = 39023·85 Kronen.

Jahr	Zinsen	Capital-amortisations-quote	Verbleibende Schuld
1	27500·—	11523·85	538476·15
2	26923·81	12100·04	526376·11
3	26318·81	12705·04	513671·07
4	25683·55	13340·30	500330·77
5	25016·54	14007·31	486323·46
6	24316·17	14707·68	471615·78
7	23580·79	15443·06	456172·72
8	22808·64	16215·21	439957·51
9	21997·88	17025·97	422931·54
10	21146·58	17877·27	405054·27
11	20252·71	18771·14	386283·13
12	19314·16	19709·69	366573·44
13	18328·67	20695·18	345878·26
14	17293·91	21729·94	324148·32
15	16207·42	22816·43	301331·89
16	15066·59	23957·26	277374·63
17	13868·73	25155·12	252219·51
18	12610·98	26412·87	225806·64
19	11290·33	27733·52	198073·12
20	9903·66	29120·19	168952·93
21	8447·65	30576·20	138376·73
22	6918·84	32105·01	106271·72
23	5313·59	33710·26	72561·46
24	3628·07	35395·78	37165·68
25	1858·28	37165·57	—·11

Der im vorstehenden Tilgungsplan verbleibende Rest von 11 Heller ist belanglos; derartige kleine Differenzen ergeben sich infolge der bei der Berechnung angewendeten Correcturen und weil die Annuität nicht vollkommen genau berechnet ist, sie ist im gewählten Beispiele nicht 39.023·85 Kronen, sondern genauer 39.023·8515 Kronen. Die Summe der Capitalamortisationsquoten beträgt 549.999·99 Kronen oder sehr nahe 550.000 Kronen.

63. Ein Capital von 80.500 Kronen soll durch eine jährlich am Schlusse jedes Jahres zu zahlende Annuität von 6459·53 Kronen sammt Zinseszinsen getilgt werden; man construiere den Tilgungsplan. 5% Zinseszinsen.

Die Anzahl der Jahre, innerhalb welcher die Tilgung erfolgt, ist hier nicht gegeben, sie wäre zu finden aus

$$A = \frac{C\,v^n\,(v-1)}{v^n - 1}$$

be ist jedoch nicht nöthig sie erst zu berechnen, sie ergibt sich sei der Bildung des Tilgungsplanes. Derselbe wird lauten:

Annuität 6459·53 Kronen.

Jahr	Zinsen	Capital-amortisations-quote	Verbleibende Schuld
1	4025·—	2434·53	78065·47
2	3903·27	2556·26	75509·21
3	3775·46	2684·07	72825·14
4	3641·26	2818·27	70006·87
5	3500·34	2959·19	67047·68
6	3352·38	3107·15	63940·53
7	3197·03	3262·50	60678·03
8	3033·90	3425·63	57252·40
9	2862·62	3596·91	53655·49
10	2682·77	3776·76	49878·73
11	2493·94	3965·59	45913·14
12	2295·66	4163·87	41749·27
13	2087·46	4372·07	37377·20
14	1868·86	4590·67	32786·53
15	1639·33	4820·20	27966·33
16	1398·32	5061·21	22905·12
17	1145·26	5314·27	17590·85
18	879·54	5579·99	12010·86
19	600·54	5858·99	6151·87
20	307·59	6151·94	—

64. Wie lautet der Tilgungsplan zum Beispiele Nr. 61?

65. Jemand nimmt von einer Sparcassa auf seine Realität ein Anlehen von 18.200 Kronen, welches in 25 Jahren getilgt sein soll; wie lautet der Tilgungsplan, wenn die Sparcassa Hypothekardarlehen mit 5% ganzjährig verzinst?

Um die Richtigkeit des Tilgungsplanes an irgendeiner Stelle genau controlieren zu können, kann man für das Jahr, für welches die Richtigkeit erprobt werden soll, die Capitalamortisationsquote durch directe Rechnung bestimmen und mit der Angabe des Tilgungsplanes vergleichen. Die directe Berechnung ergibt sich aus folgender Ableitung:

Die Annuität $A = \frac{C\, v^n \,.\, (v - 1)}{v^n - 1}$ dient sowohl zur Abtragung des Capitals als der Zinsen. Bezeichnet man die Capitalamortisationsquoten wie früher (Seite 28) mit x_1, x_2, x_3 u. s. f., dann bildet jede derselben mit dem auf die Amortisation der Zinsen jährlich entfallenden Betrag zusammen die Annuität; diese auf die Zinsen entfallenden Amortisationsquoten sind aber:

Im ersten Jahr $\frac{C\, p}{100}$

im zweiten Jahr $(C - x_1)\,\frac{p}{100}$

im dritten Jahr $(C - x_1 - x_2)\,\frac{p}{100}$

im vierten Jahr $(C - x_1 - x_2 - x_3)\,\frac{p}{100}$

$\vdots$

im n^{ten} Jahr $(C - x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{n-1})\,\frac{p}{100}$

folglich ist

1. $x_1 + \frac{C\, p}{100} = A$

2. $x_2 + (C - x_1)\,\frac{p}{100} = A$

3. $x_3 + (C - x_1 - x_2)\frac{p}{100} = A$

$$\vdots$$

$$x_n + (C - x_1 - x_2 - x_3 \ldots - x_{n-1})\frac{p}{100} = A.$$

Subtrahiert man jede dieser Gleichungen von der nächstfolgenden, so ergibt sich:

Glg 2 — Glg 1 $\quad x_2 + \frac{C\,p}{100} - \frac{x_1\,p}{100} - x_1 - \frac{C\,p}{100} = o$

$$x_2 = x_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = x_1\,v$$

Glg 3 — Glg 2

$$x_3 + \frac{C\,p}{100} - \frac{x_1\,p}{100} - \frac{x_2\,p}{100} - x_2 - \frac{C\,p}{100} + \frac{x_1\,p}{100} = o$$

$$x_3 = x_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = x_2\,v \text{ oder } x_3 = x_1\,v^2.$$

Führt man dieses Verfahren an allen Gleichungen durch, dann erhält man:

$$x_2 = x_1\,v$$
$$x_3 = x_1\,v^2$$
$$x_4 = x_1\,v^3$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_1\,v^{n-1}.$$

Diese Formel $x_n = x_1\,v^{n-1}$ gestattet uns die Capitalamortisationsquote für ein beliebiges Jahr zu berechnen, vorausgesetzt, dass uns x_1 bekannt sei. x_1 kann nun leicht ermittelt werden; addieren wir sämmtliche Gleichungen und noch dazu die Gleichung $x_1 = x_1$, dann erhalten wir:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n = x_1 + x_1\,v + x_1\,v^2 + x_1\,v^3 + \\ + \ldots + x_1\,v^{n-1}.$$

Die Summe aller Capitalamortisationsquoten ist aber das Capital C,

$$\text{daher } C = x_1 (1 + v + v^2 + v^3 + \ldots . + v^{n-1})$$

$$C = x_1 \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

$$\text{und } x_1 = \frac{C (v - 1)}{v^n - 1}.$$

Die Formel, die wir zur Controle des Tilgungsplanes benützen, wird daher lauten:

$$x_n = \frac{C\, v^{n-1} (v - 1)}{v^n - 1} \,^{*)}.$$

66. Es soll die Richtigkeit des im Beispiele Nr. 62 entwickelten Tilgungsplanes für das 17. Jahr controliert werden.

$x_{17} = ?$ $\qquad x_{17} = \frac{C \,.\, v^{16} (v - 1)}{v^{25} - 1}$ $\qquad C (v - 1) = 27500$

$C = 550000$

$v = 1.05$

$$\begin{aligned} \log x_{17} &= \log 27500 + 16 \log 1{\cdot}05 - \log (1{\cdot}05^{25} - 1) \\ &= 4{\cdot}4393327 + 0{\cdot}3390288 - 0{\cdot}3777350 \\ &= 4{\cdot}4006265 \end{aligned}$$

$x_{17} = 25155{\cdot}13$, was mit der im Tilgungsplan enthaltenen Zahl 25155·12 übereinstimmt.

67. u. 68. Die in den Beispielen 64 und 65 zu entwickelnden Tilgungspläne sollen für das 13. Jahr auf ihre Richtigkeit geprüft werden.

Handelt es sich um Entscheidung der Frage, nach wie viel Jahren ein Capital C durch eine Annuität A bei $p\%$ Zinseszins getilgt sein würde, so wäre aus

$$A = \frac{C\, v^n (v - 1)}{v^n - 1}$$

$$A\, v^n - A = C\, v^n (v - 1)$$

$$A\, v^n - C\, v^n (v - 1) = A$$

$$v^n (A - C\, v + C) = A$$

$$v^n = \frac{A}{A + C - C\, v} = \frac{A}{A - C (v - 1)}$$

und die Lösung der Aufgabe erreicht eine Grenze, wenn $A = C (v - 1)$ wird, dann ist der Nenner des Bruches

*) Bei Anwendung dieser Formel beachte man, dass das n bei v^{n-1} für das zu berechnende Jahr, bei $v^n - 1$ für die Dauer der Tilgung gilt!

$A - C(v - 1) = o$ und $\frac{A}{o}$ unendlich groß, also auch $v^n = \infty$. Da v einen gegebenen Wert hat, wird $n = \infty$, d. h. in einem solchen Falle wird das Capital in einer unendlichen Zahl von Jahren, also überhaupt nicht getilgt werden können; die Annuität dient dann nur zur Tilgung der Zinsen. So kann ein Capital von 600.000 Kronen bei 5% Zinseszinsen durch eine Annuität von 30.000 Kronen nie getilgt werden, denn die Zinsen von 600.000 Kronen für 1 Jahr betragen $\frac{600000 \,.\, 5}{100} = 30.000$ und bei Zahlung der Annuität von 30.000 wird vom Capital nichts amortisiert. Man ersieht daraus, dass bei einer festzusetzenden Annuität dieselbe jedenfalls größer sein muss als $C(v - 1) = \frac{C\,p}{100}$.

Anlehen müssen jedoch nicht immer, wie es in den bisher gewählten Beispielen angenommen wurde, sich auf einen bestimmten Darlehensgeber beziehen, sondern die durch das Anlehen erwachsene Forderung des Darlehensgebers kann in verschiedene Hände übergehen. Zu diesem Zwecke kann ein Anlehen in eine bestimmte Anzahl von sogenannten Obligationen*) eingetheilt werden, deren jede auf eine bestimmte Summe lautend (den Nominalwert, Nennwert), vom Schuldner eingelöst werden muss, entweder zum Nominalwert oder zu einem größeren Wert. Vorläufig wollen wir nur den Fall betrachten, dass die Obligationen zu ihrem Nominalwert einzulösen seien, und die Aufstellung des Tilgungsplanes an einem speciellen Beispiele durchführen.

69. Ein Capital von 2,500.000 Kronen, abgetheilt in 12.500 Obligationen zu je 200 Kronen, soll in 25 Jahren sammt den inzwischen aufgelaufenen 6%igen Zinseszinsen durch eine am Schlusse jedes Jahres zu zahlende Annuität getilgt werden.

Nach der Formel $A = \frac{C\,v^n\,(v - 1)}{v^n - 1}$ finden wir die hiezu nothwendige Annuität $A = 195566{\cdot}82$ Kronen.

Im ersten Jahre werden die 6%igen Zinsen des Capitals 150.000 Kronen betragen, somit verbleibt von der Annuität

---

*) obligare = binden, verbindlich machen.

195566·82 Kronen
— 150000·— Kronen
45566·82 Kronen zur Capitalsabtragung

und wir werden imstande sein mit dieser Summe 227 Stück Obligationen im Gesammtwerte von 45.400 Kronen einzulösen. Von der Annuität verbleibt nun noch ein Rest von

45566·82 Kronen
— 45400·— Kronen
166·82 Kronen, welcher nicht mehr ausreicht, um eine Obligation einzulösen, wir können ihn jedoch im nächsten Jahre zur Annuität zufügen und wieder verwenden, wobei dieser Rest inzwischen zu 6% sich verzinsen wird. Demnach haben wir für das zweite Jahr

Annuität	195566·82	Kronen
Rest vom Vorjahre zu 6% verzinst	176·83	Kronen
Annuität im 2. Jahre .	195743·65	Kronen.

Vom Capital wurden inzwischen 45.400 Kronen abgetragen, es verbleiben noch weitere 2,454.600 Kronen zu amortisieren, deren 6%ige Zinsen sind 147.276 Kronen.

Annuität .	195743·65	Kronen
ab Zinsen des 2. Jahres .	147276·—	Kronen
Capitalamortisationsquote .	48467·65	Kronen,

durch diese Quote per 48.467·65 Kronen können 242 Stück Obligationen zum Nominalwert eingelöst werden, die Capitalsabtragung beträgt dann 48.400 Kronen und von der Annuität verbleibt neuerdings ein Rest, diesmal von 67·65 Kronen, welcher wieder im folgenden Jahre Verwendung findet. Die Annuität im dritten Jahre ist

	195566·82	Kronen
Rest vom Vorjahre zu 6% verzinst .	71·71	Kronen
Annuität im 3. Jahre	195638·53	Kronen.

Auf gleiche Weise findet die Berechnung für die nun folgenden Jahre statt. Der zugehörige Tilgungsplan würde nun die folgende Form annehmen:

Annuität 195566·82 Kronen.

Jahr	Zinsen	Anzahl der einzulösenden Obligationen	Capital-amortisations-quote	Verbleibende Schuld	Rest der Annuität
1	150000	227	45400	2454600	166·82
2	147276	242	48400	2406200	67·65
3	144372	256	51200	2355000	66·53
4	141300	271	54200	2300800	137·34
5	138048	288	57600	2243200	64·40
6	134592	305	61000	2182200	43·08
7	130932	323	64600	2117600	80·48
8	127056	342	68400	2049200	196·13
9	122952	364	72800	1976400	22·72
10	118584	385	77000	1899400	6·90
11	113964	408	81600	1817800	10·13
12	109068	432	86400	1731400	109·56
13	103884	458	91600	1639800	198·95
14	98388	486	97200	1542600	189·71
15	92556	516	103200	1439400	11·91
16	86364	546	109200	1330200	15·44
17	79812	578	115600	1214600	171·19
18	72876	614	122800	1091800	72·28
19	65508	650	130000	961800	135·44
20	57708	690	138000	823800	2·39
21	49428	730	146000	677800	141·35
22	40668	775	155000	522800	48·65
23	31368	821	164200	358600	50·39
24	21516	870	174000	184600	104·23
25	11076	923	184600	—	1·30

Auch hier erscheint es zweckmäßig, die Anzahl der einzulösenden Obligationen für irgendein Jahr feststellen zu können, um die Richtigkeit des Tilgungsplanes für dieses Jahr zu prüfen. Nennen wir allgemein C das sammt Zinsen in n Jahren zu tilgende Capital, welches in m Obligationen abgetheilt wäre, und es müsste jede derselben zu ihrem Nominalwerte o eingelöst werden, ferner sei $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots x_n$ die Anzahl der in den einzelnen Jahren zur Einlösung gelangenden Obligationen, dann ist $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n = m$.

Die Annuität finden wir wie früher zu $A = \frac{C v^n (v-1)}{v^n - 1}$.

$A - \frac{Cp}{100}$ ist die im 1ten Jahre zur Verfügung stehende Capitalamortisationsquote, damit können wir x_1 Obligationen zum Werte o einlösen, also $x_1 o$ Kronen.

$$1.\ A - \frac{Cp}{100} = x_1 o \quad \text{im ersten Jahre*)}$$

$$2.\ A - (C - x_1 o)\frac{p}{100} = x_2 o \quad \text{im zweiten Jahre}$$

$$3.\ A - (C - x_1 o - x_2 o)\frac{p}{100} = x_3 o \quad \text{im dritten Jahre}$$

$$\vdots$$

$$n.\ A - (C - x_1 o - x_2 o - x_3 o - \ldots\ldots - x_{n-1} o)\frac{p}{100} =$$

$$= x_n o \text{ im } n^{\text{ten}} \text{ Jahre.}$$

Wenden wir hier denselben Kunstgriff an wie früher auf Seite 33, subtrahieren wir jede dieser Gleichungen von der vorhergehenden, so erhalten wir

$$1.–2.\quad A - \frac{Cp}{100} + \frac{Cp}{100} - \frac{x_1 o p}{100} - A = x_1 o - x_2 o$$

$$x_2 o = x_1 o + \frac{x_1 o p}{100}$$

$$x_2 = x_1 v$$

ferner: $x_3 = x_2 v$

$$x_4 = x_3 v$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} v$$

oder wenn wir die Reihe dieser Gleichungen durch $x_1 = x_1$ ergänzen und auf der rechten Seite sämmtliche Glieder durch x_1 ausdrücken:

$$x_1 = x_1$$

$$x_2 = x_1 v$$

$$x_3 = x_1 v^2$$

$$x_4 = x_1 v^3$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_1 v^{n-1}$$

*) Dabei berücksichtigen wir nicht, dass x_1 wahrscheinlich keine ganze Zahl sein wird, ebenso auch bei x_2, x_3 bis x_n.

Die Summe aller dieser Gleichungen gibt:

$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}_{m} = x_1 + x_1 v + x_1 v^2 + x_1 v^3 + \ldots + x_1 v^{n-1}$$

$$= x_1 (1 + v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1})$$

$$m = x_1 \frac{v^n - 1}{v - 1}$$

daraus ist $x_1 = \frac{m(v-1)}{v^n - 1}$

und da $x_n = x_1 v^{n-1}$

so ist $x_n = \frac{m(v-1)}{v^n - 1} \cdot v^{n-1}$ und dieser Formel bedienen wir uns zur Prüfung des Tilgungsplanes.*)

Es sei der vorher entwickelte Tilgungsplan auf seine Richtigkeit im 12. Jahre zu prüfen.

$$x_{12} = \frac{12500 \cdot 0{\cdot}06}{1{\cdot}06^{25} - 1} \cdot 1{\cdot}06^{11}$$

$$x_{12} = \frac{750 \cdot 1{\cdot}06^{11}}{1{\cdot}06^{25} - 1}$$

$$\log x_{12} = 2{\cdot}8750613 + 0{\cdot}27836457 - 0{\cdot}5174429$$

$$= 2{\cdot}63598297$$

$$= 432{\cdot}497.$$

Demnach können im 12. Jahre 432 Obligationen eingelöst werden, was mit dem Tilgungsplan übereinstimmt. Der Rest 0·497 entspricht ungefähr dem in der letzten Columne verzeichneten Annuitätsrest.

70. Ein Anlehen von 875.000 Kronen, eingetheilt in 3500 Obligationen à 250 Kronen, soll sammt den 6%igen Zinseszinsen durch eine am Schlusse jedes Jahres zu zahlende Annuität von 76.286·50 Kronen getilgt werden, wobei die Obligationen zu ihrem Nominalwert zur Einlösung gelangen. Wie lautet der Tilgungsplan? Man berechne die Anzahl der im 18. Jahre einzulösenden Obligationen.

Sind die Obligationen nicht zu ihrem Nominalwert, sondern zu einem höheren Werte o' einzulösen, dann ist die Rechnung entsprechend abzuändern. Es sei wieder C das zu tilgende Capital, welches in m Obligationen zum Nominalwerte o abgetheilt ist

*) Dabei dürfen wir wieder nicht vergessen, dass bei v^{n-1} das n sich auf das zu untersuchende Jahr bezieht!

und in n Jahren amortisiert sein soll. Die in den fortlaufenden Jahren zur Einlösung gelangenden Obligationen seien wieder mit x_1, x_2, x_3 u. s. f. bezeichnet, jede derselben besitze den Wert o', dann wird mit der am Ende des ersten Jahres gezahlten Annuität A gezahlt werden können:

$$\frac{Cp}{100} \text{ an Zinsen}$$

$$x_1 \,.\, o' \text{ an Capital}$$

$$\text{und } A = \frac{Cp}{100} + x_1 o'$$

Vom Capital verbleibt noch eine Schuld von $C - x_1 o$ Kronen, deren Zinsen am Schlusse des 2. Jahres $(C - x_1 o) \frac{p}{100}$ betragen.

$$A = (C - x_1 o) \frac{p}{100} + x_2 o'$$

$$A = (C - x_1 o - x_2 o) \frac{p}{100} + x_3 o'$$

$$\vdots$$

$$A = (C - x_1 o - x_2 o - x_3 o - \ldots - x_{n-1} o) \frac{p}{100} + x_n o'$$

am Schlusse des n^{ten} Jahres.

Subtrahiert man jede dieser Gleichungen von der nächstfolgenden, so erhält man:

$$A - A = \frac{Cp}{100} - \frac{x_1 o p}{100} - \frac{Cp}{100} - x_1 o' + x_2 o'$$

$$o = x_2 o' - x_1 \left(o' + \frac{o p}{100}\right)$$

$$\text{oder } x_2 o' = x_1 o' \left(1 + \frac{o p}{o' . 100}\right)$$

$$x_2 = x_1 \left(1 + \frac{o p}{o' 100}\right)$$

ebenso erhält man:

$$x_3 = x_2 \left(1 + \frac{o p}{o' 100}\right)$$

$$x_4 = x_3\left(1 + \frac{o\,p}{o'\,100}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1}\left(1 + \frac{o}{o'}\cdot\frac{p}{100}\right);$$

bezeichnet man den Factor $\left(1 + \frac{o}{o'}\cdot\frac{p}{100}\right)$ der Einfachheit halber mit α, dann ist

$$x_2 = x_1\,\alpha$$

$$x_3 = x_2\,\alpha = x_1\,\alpha^2$$

$$x_4 = x_3.\alpha = x_1\,\alpha^3$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_1\,\alpha^{n-1}.$$

Ergänzt man die Reihe dieser Gleichungen durch $x_1 = x_1$ und addiert, so erhält man:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n = x_1(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^{n-1})$$

$$m = x_1\,\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$$

woraus $x_1 = \dfrac{m\,.\,(\alpha - 1)}{\alpha^n - 1}$

Aus $A = \dfrac{Cp}{100} + x_1\,o'$ folgt $A = \dfrac{m\,o\,p}{100} + x_1\,o'$

$$\alpha = 1 + \frac{o}{o'}\cdot\frac{p}{100}$$

$$\alpha - 1 = \frac{o}{o'}\cdot\frac{p}{100}$$

$$\frac{p}{100} = \frac{o'}{o}\,(\alpha - 1)$$

$$A = \frac{m\,o\,p}{100} + \frac{m\,o'\,(\alpha - 1)}{\alpha^n - 1}$$

$$A = \frac{m\,o'\,(\alpha - 1)\,\alpha^n}{\alpha^n - 1}.$$

Der Tilgungsplan wird folgende Gestalt annehmen:

Annuität $= A$.

Jahr	$p^0/_0$ decursive Zinsen	Anzahl der einzulösenden Obligationen	Capital-amortisations-quote	Verbleibende Schuld
1	$\frac{Cp}{100}$	x_1	$x_1 o$	$C - x_1 o$
2	$(C - x_1 o)\frac{p}{100}$	x_2	$x_2 o$	$C - x_1 o - x_2 o$
3	$(C - x_1 o - x_2 o)\frac{p}{100}$	x_3	$x_3 o$	$C - x_1 o - x_2 o - x_3 o$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$(C - x_1 o - x_2 o - \ldots - x_{n-1} o)\frac{p}{100}$	x_n	$x_n o$	$C - x_1 o - x_2 o - \ldots - x_n o = 0$

71. Ein Capital von 458.000 Kronen, eingetheilt in 2290 Obligationen à 200 Kronen, soll in 25 Jahren amortisiert werden und die Obligationen mit 225 Kronen zur Einlösung gelangen. Wie lautet der Tilgungsplan, wenn $5^0/_0$ decursive Verzinsung angenommen wird?

Wir berechnen die Annuitäten aus $A = \frac{m o' (\alpha - 1)\alpha^n}{\alpha^n - 1}$;

wobei

$$m = 2290$$
$$o' = 225$$
$$\alpha = 1{\cdot}0\dot{4} = \tfrac{47}{45}$$
$$n = 25$$

$$\log A = \log 2290 + \log 225 + \log(\alpha - 1) + n \,.\, \log\alpha - \log(\alpha^n - 1)$$
$$= 3{\cdot}3598355 + 2{\cdot}3521825 + 0{\cdot}3010300 - 1{\cdot}6532125 +$$
$$+ 0{\cdot}4721350 - 0{\cdot}29352825$$
$$= 4{\cdot}53844225$$
$$A = 34549{\cdot}54 \text{ Kronen.}$$

Von der Annuität A werden zum Schlusse des ersten Jahres $\frac{Cp}{100} = 22900$ Kronen zur Tilgung der inzwischen aufgelaufenen

Zinsen verwendet und es bleiben $A - \frac{Cp}{100} = 11649{\cdot}54$ Kronen zur Einlösung der Obligationen. Die Einlösung derselben geschieht zu 225 Kronen, somit werden 11649·54 : 225 = 51·775 Obligationen eingelöst werden können oder rund 52. Die Anzahl der jedes Jahr zur Einlösung gelangenden Obligationen finden wir jedoch auch direct nach den Formeln:

$$x_1 = \frac{m\,(\alpha - 1)}{(\alpha^n - 1)} \quad \text{und} \quad x_n = x_1\,\alpha^{n-1}$$

$$\log x_1 = \log m + \log(\alpha - 1) - \log(\alpha^n - 1)$$
$$= 3{\cdot}3598355 + 0{\cdot}3010300 - 1{\cdot}6532125 - 0{\cdot}29352825$$
$$= 1{\cdot}71412475$$
$$x_1 = 51{\cdot}775 \text{ oder rund } 52$$

x_1 ist nun noch fortgesetzt mit α zu multiplicieren (d. i. mit $1{\cdot}0\dot{4}$) um x_2, x_3, x_4 u. s. f. zu erhalten.

Der Tilgungsplan wird lauten:

Annuität 34549·54 Kronen.

Jahr	5% decursive Zinsen	Anzahl der einzulösenden Obligationen	Capital-amortisations-quote	Verbleibende Schuld
1	22900	52	10400	447600
2	22380	54	10800	436800
3	21840	57	11400	425400
4	21270	59	11800	413600
5	20680	62	12400	401200
6	20060	64	12800	388400
7	19420	67	13400	375000
8	18750	70	14000	361000
9	18050	73	14600	346400
10	17320	77	15400	331000
11	16550	80	16000	315000
12	15750	84	16800	298200
13	14910	87	17400	280800
14	14040	91	18200	262600
15	13130	95	19000	243600
16	12180	99	19800	223800
17	11190	104	20800	203000
18	10150	108	21600	181400
19	9070	113	22600	158800
20	7940	118	23600	135200
21	6760	124	24800	110400
22	5520	129	25800	84600
23	4230	135	27000	57600
24	2880	141	28200	29400
25	1470	147	29400	0
		2290	458000	

Genauer, aber viel umständlicher findet man den Tilgungsplan nach dem auf Seite 36 entwickelten Vorgange, woselbst die Obligationen zum Nominalwert eingelöst wurden. Ganz ähnlich ist auch hier zu verfahren. Durch die Annuität von 34549·54 Kronen müssen im ersten Jahre die Zinsen $\frac{Cp}{100} = 22900$ getilgt werden, es bleiben somit zur Einlösung der Obligationen 34549·54 — 22900 = 12649·54 Kronen zur Verfügung; damit können 12649·54 : 225 = 51 Stück Obligationen à 225 Kronen eingelöst werden und es bleibt ein Rest von 174·54 Kronen übrig. Dieser Rest reicht nicht mehr aus, um eine Obligation einzulösen, er wird im nächsten Jahre mit der Annuität verwendet. Diese beträgt dann:

	34549·54 Kronen
Rest vom Vorjahre sammt 5% Zinsen	183·27 Kronen
Annuität im 2. Jahre	34732·81 Kronen.

Vom Capital wurden durch die 51 eingelösten Obligationen 10200 Kronen amortisiert, es verbleibt somit noch eine Schuld von 458000 — 10200 = 447800 Kronen, deren 5%ige Zinsen durch die Annuität im 2. Jahre getilgt werden müssen.

Von der Annuität per 34732·81 Kronen verbleibt demnach ab 5%ige Zinsen der Schuld 22390·— Kronen
12342·81 Kronen;

damit können nun 54 Obligationen à 225 Kronen eingelöst werden und es bleibt neuerdings ein Annuitätsrest von 192·81 Kronen. Das Verfahren wird wiederholt.

Der Tilgungsplan wird lauten:

Annuität = 34549·54 Kronen.

Jahr	5% decursive Zinsen	Anzahl der einzulösenden Obligationen	Capital-amortisations-quote	Verbleibende Schuld	Rest der Annuität
1	22900·—	51	10200·—	447800·—	174·54
2	22390·—	54	10800·—	437000·—	192·81
3	21850·—	57	11400·—	425600·—	76·99
4	21280·—	59	11800·—	413800·—	75·38
5	20690·—	61	12200·—	401600·—	213·69
6	20080·—	65	13000·—	388600·—	68·91
7	19430·—	67	13400·—	375200·—	116·90

Jahr	$5^0/_0$ decursive Zinsen	Anzahl der einzulösenden Obligationen	Capital-amortisations-quote	Verbleibende Schuld	Rest der Annuität
8	18760·—	70	14000·—	361200·—	162·29
9	18060·—	74	14800·—	346400·—	9·94
10	17320·—	76	15200·—	331200·—	139·98
11	16560·—	80	16000·—	315200·—	136·52
12	15760·—	84	16800·—	298400·—	32·89
13	14920·—	87	17400·—	281000·—	89·07
14	14050·—	91	18200·—	262800·—	17·07
15	13140·—	95	19000·—	243800·—	52·46
16	12190·—	99	19800·—	224000·—	139·62
17	11200·—	104	20800·—	203200·—	96·14
18	10160·—	108	21600·—	181600·—	190·49
19	9080·—	114	22800·—	158800·—	19·55
20	7940·—	118	23600·—	135200·—	80·07
21	6760·—	123	24600·—	110600·—	198·61
22	5530·—	129	25800·—	84800·—	203·08
23	4240·—	135	27000·—	57800·—	147·77
24	2890·—	141	28200·—	29600·—	89·70
25	1480·—	148	29600·—	—	—

Cours der Anlehen.

Wie früher bereits gesagt wurde, werden größere Anlehen in eine Anzahl auf den gleichen Betrag (Nominalwert) lautende Obligationen (Actien, Schuldverschreibungen, Pfandbriefe) abgetheilt. Diese Papiere müssen von der Gesellschaft, die das Anlehen macht, nach einer bestimmten Zeit sammt den $p^0/_0$igen Zinseszinsen eingelöst werden. Die Papiere sind verkäuflich. Der Käufer kann nun diese Papiere zum Nominalwert mit $p^0/_0$iger Verzinsung übernehmen, oder aber er wird mit einer $p^0/_0$igen Verzinsung seines Geldes nicht zufrieden sein, sondern die Obligationen nur dann übernehmen, wenn sie ihm $q^0/_0$ tragen. Hiebei ist $q > p$ gedacht. Da nun der Nominalwert für eine $p^0/_0$ige Verzinsung gilt, so wird der Käufer offenbar einen geringeren Betrag für die Papiere bar bezahlen. Diesen Betrag nennt man den Courswert. Wie derselbe gefunden wird, soll an einem speciellen Beispiele gezeigt werden.

Der Staat will ein im Laufe von 50 Jahren rückzahlbares Anlehen von 5,000.000 Kronen zu $3^1/_2{}^0/_0$ abschließen; das Anlehen sei in 10.000 Obligationen à 500 Kronen abgetheilt und soll durch eine am Schlusse jedes Jahres zu zahlende Annuität getilgt werden, so dass jährlich eine Anzahl der Obligationen zum Nominalwerte zur Einlösung gelangt. Wir finden die hiezu erforderliche Annuität A nach der Formel:

$$A = \frac{C\,v^n\,(v-1)}{v^n - 1}$$

zu $A = 213168{\cdot}55$ Kronen.

Die Obligationen finden nun beispielsweise nur Käufer, die eine $4^1/_4{}^0/_0$ige Verzinsung ihres Geldes beanspruchen, dann reicht die Annuität nicht aus, um ein Anlehen von 5,000.000 Kronen in 50 Jahren zu tilgen, sondern ein geringeres Anlehen. Es sei mit x bezeichnet und wir finden es aus:

$$A = \frac{x . v^n (v - 1)}{v^n - 1}$$

wobei $A = 213168{\cdot}55$
$v = 1{\cdot}0425$
$n = 50$

$$x = \frac{A\,(v^n - 1)}{v^n\,(v - 1)}$$

$$x = 4389793{\cdot}\text{—} \text{ Kronen.}$$

Im Falle der Kauf abgeschlossen wird, bekommt der Staat für die 10.000 Obligationen, die er zu $3^1/_2{}^0/_0$ einzulösen hat, 4389793 Kronen. der Käufer erreicht eine Verzinsung seines Capitals zu $4^1/_4{}^0/_0$ und übernimmt die Obligationen nicht zum Nominalwert, sondern zum Courswert von 438·98 Kronen per Stück (für je 100 Kronen Nominalwert zahlt er 87·80 Kronen Courswert).

Tilgungspläne bei anticipativer Verzinsung.

Die bisher aufgestellten Tilgungspläne gelten unter der Voraussetzung, dass die Verzinsung decursiv erfolgt, es kommt jedoch bei Amortisationen von Anlehen häufig anticipative Berechnung der Zinsen vor, weshalb hier auch die Aufstellung eines Tilgungsplanes bei anticipativer Verzinsung durchgeführt werden soll.

Es sei C das sammt Zinseszins zu tilgende Capital, A die Annuität, welche am Schlusse jedes Jahres gezahlt wird, n die Anzahl der Jahre, innerhalb welcher die Tilgung erfolgt sein soll, endlich w der Aufzinsungsfactor für $p^0/_0$ anticipativer Verzinsung.

Die am Schlusse des 1. Jahres gezahlte Annuität A hat am Ende des n^{ten} Jahres bei anticipativer Verzinsung den Wert $\frac{A}{w^{n-1}}$, ebenso finden wir den Wert der folgenden Annuitäten

bezogen auf das Ende des n^{ten} Jahres zu $\frac{A}{w^{n-2}}, \frac{A}{w^{n-3}}, \ldots \frac{A}{w}, A$ während das Capital C sammt Zinseszinsen $\frac{C}{w^{n-1}}$ beträgt; soll das Capital sammt Zinseszinsen dann getilgt sein, so besteht die Amortisationsgleichung:

$$\frac{A}{w^{n-1}} + \frac{A}{w^{n-2}} + \frac{A}{w^{n-3}} + \ldots + \frac{A}{w} + A - \frac{C}{w^{n-1}} = o$$

oder

$$A\,(1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-2} + w^{n-1}) - C = o$$

$$A\,\frac{(w^n - 1)}{(w-1)} = C$$

daraus ist $A = \frac{C\,(w-1)}{(w^n - 1)}$.

Bezeichnet man die in jedem Jahre durch die Annuität abzuzahlenden Capitalamortisationsquoten wieder wie früher mit $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$, dann wird mit der am Schlusse des ersten Jahres gezahlten Annuität A vom Capital C der Betrag x_1 getilgt werden, es verbleibt vom Capital noch $(C - x_1)$, wovon sofort noch die Zinsen $(C - x_1)\frac{p}{100}$ zu bezahlen sind. Der Schuldner bekommt gar nicht das Capital C ausbezahlt, sondern nur $C - \frac{C\,p}{100}$, da ja die Zinsen anticipativ berechnet werden, daher werden auch im zweiten Jahre die Zinsen schon zu Anfang des Jahres in Rechnung gebracht, der Anfang des zweiten Jahres ist jedoch gleichbedeutend mit dem Ende des ersten Jahres. Demnach ist die Annuität:

1. Im 1. Jahre $A = x_1 + (C - x_1)\,\frac{p}{100}$
2. im 2. Jahre $A = x_2 + (C - x_1 - x_2)\,\frac{p}{100}$
3. im 3. Jahre $A = x_3 + (C - x_1 - x_2 - x_3)\,\frac{p}{100}$

$\vdots$

im n^{ten} Jahre $A = x_n + (C - x_1 - x_2 - x_3 - \ldots$

$$\ldots - x_n) \frac{p}{100}$$

in der letzten dieser Gleichungen wird der Ausdruck $(C - x_1 -$

$$- x_2 - x_3 \ldots\ldots - x_n) \frac{p}{100} = o$$

denn $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n = C$,

dann ist $A = x_n$ wie auch einzusehen ist, denn im n^{ten} Jahre ist das Capital getilgt, die anticipativen Zinsen des $(n+1)^{ten}$ Jahres nicht mehr vorhanden.

Subtrahiert man jede dieser Gleichungen von der nächstfolgenden, also z. B. 1. von 2., so erhält man:

$$A - A = x_2 + \frac{C\,p}{100} - x_1 \frac{p}{100} - x_2 \frac{p}{100} - x_1 -$$

$$- C \frac{p}{100} + x_1 \frac{p}{100}$$

$$o = x_2 - x_2 \frac{p}{100} - x_1$$

$$x_1 = x_2 \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

$x_1 = x_2\, w$, ebenso erhalten wir:

$$x_2 = x_3\, w$$
$$x_3 = x_4\, w$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} = x_n\, w$$

oder wenn wir der Vollständigkeit halber $x_1 = x_1$ dazu setzen und die rechten Seiten der Gleichungen durch x_1 ausdrücken:

$$x_1 = x_1$$
$$x_2 = \frac{x_1}{w}$$
$$x_3 = \frac{x_1}{w^2}$$
$$\vdots$$

$\vdots$

$$x_n = \frac{x_1}{w^{n-1}}$$

Die Addition dieser Gleichungen ergibt:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n = x_1 \left(1 + \frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} + \ldots\ldots \ldots\ldots + \frac{1}{w^{n-1}}\right)$$

$$w^{n-1} \,.\, C = x_1 \left(w^{n-1} + w^{n-2} + \ldots\ldots + w + 1\right)$$

$$C \,.\, w^{n-1} = x_1 \frac{w^n - 1}{w - 1}$$

$$x_1 = \frac{C\, w^{n-1}\,(w - 1)}{w^n - 1}$$

die Werte für x_2, x_3, x_4 u. s. f. sind daraus jederzeit leicht abzuleiten und der Tilgungsplan an jeder Stelle auf seine Richtigkeit zu prüfen.

Ein solcher Tilgungsplan wird folgende Form annehmen:

$$\text{Annuität} = C\, \frac{w - 1}{w^n - 1}$$

Jahr	Schuld zu Beginn des Jahres	p% anticipative Zinsen zahlbar am Beginne des Jahres	Capitalamortisationsquote am Schlusse des Jahres
1	C	$\frac{C\,p}{100}$	$x_1 = \frac{C w^{n-1}\,(w-1)}{w^n - 1}$
2	$C - x_1$	$(C - x_1)\,\frac{p}{100}$	x_2
3	$C - x_1 - x_2$	$(C - x_1 - x_2)\,\frac{p}{100}$	x_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$C - x_1 - x_2 - \ldots\ldots - x_{n-1}$	$(C - x_1 - x_2 - \ldots\ldots - x_{n-1})\,\frac{p}{100}$	x_n

72. Ein Anlehen von 650.000 Kronen soll bei 5% anticipativer Verzinsung durch eine am Schlusse jedes Jahres zu zahlende Annuität in 30 Jahren getilgt sein. Wie lautet der Tilgungsplan?

Wir finden die Annuität:

$$A = \frac{C(w-1)}{w^n - 1}$$

$$= \frac{650000 . 0{\cdot}05}{1 - 0{\cdot}95^{30}}$$

$$= \frac{32500}{1 - 0{\cdot}95^{30}}$$

$$A = 41382{\cdot}23 \text{ Kronen}$$

$$\log 0{\cdot}95^{30} = 30\,(0{\cdot}9777236 - 1)$$
$$= 0{\cdot}3317080 - 1$$
$$0{\cdot}95^{30} \doteq 0{\cdot}21463876$$
$$1 - 0{\cdot}95^{30} = 0{\cdot}78536124.$$

Der Tilgungsplan wird lauten:

Annuität 41382·23 Kronen.

Jahr	Schuld zu Beginn des Jahres	p% anticipative Zinsen zahlbar zu Beginn des Jahres	Capitalamortisationsquote am Schlusse des Jahres
1	650000·—	32500·—*)	9349·72
2	640650·28	32032·51	9841·81
3	630808·47	31540·42	10359·80
4	620448·67	31022·43	10905·05
5	609543·62	30477·18	11479·—
6	598064·62	29903·23	12083·16
7	585981·46	29299·07	12719·12
8	573262·34	28663·11	13388·54
9	559873·80	27993·69	14093·20
10	545780·60	27289·03	14834·95
11	530945·65	26547·28	15615·73
12	515329·92	25766·50	16437·61
13	498892·31	24944·62	17302·75
14	481589·56	24079·48	18213·42
15	463376·14	23168·81	19172·02
16	444204·12	22210·21	20181·07
17	424023·05	21201·16	21243·23
18	402779·82	20139·00	22361·29
19	380418·53	19020·94	23538·20
20	356880·33	17844·03	24777·05
21	332103·28	16605·18	26081·10

*) Die anticipativen Zinsen per 32.500 Kronen wurden dem Darlehensnehmer bereits im vorhinein berechnet, er erhielt nur 617.500 Kronen, wofür er zu Beginn des ersten Jahres 650.000 Kronen schuldet.

Jahr	Schuld zu Beginn des Jahres	p% anticipative Zinsen zahlbar zu Bginn des Jahres	Capitalamortisations-quote am Schlusse des Jahres
22	306022·16	15301·13	27453·79
23	278568·38	13928·44	28898·73
24	249669·69	12483·50	30419·87
25	119249·79	10962·36	32020·91
26	287228·88	9361·32	33706·22
27	153522·66	7676·01	35480·23
28	118042·43	5902·—	37347·61
29	80694·82	4034·62	39313·27
30	41381·55	2068.96*)	41382·23*)

Die am Ende des 1. Jahres von der Annuität zu leistende Capitalamortisationsquote x_1 finden wir aus:

$$x_1 = \frac{C\, w^{n-1}\,(w-1)}{w^n - 1}$$

$$x_1 = A\,.\,w^{n-1}$$

$$x_1 = 41382{\cdot}23\,.\,0{\cdot}95^{29}$$

$$= 41382{\cdot}23 \times 0{\cdot}22593554$$

$$x_1 = 9349{\cdot}72 \text{ Kronen.}$$

Es verbleibt am Beginne des 2. Jahres eine Schuld von 650000 — 9349·72 = 640650·28, deren 5%ige anticipative Zinsen per 32032·51 Kronen ebenfalls durch die am Schlusse des ersten Jahres zu zahlende Annuität getilgt werden müssen. Es ist auch 32032·51 + 9349·72 = 41382·23 = A.

73. Ein Anlehen von 5½ Millionen Kronen soll durch eine am Schlusse jedes Jahres zu zahlende Annuität von 380564·65 Kronen sammt den 5%igen anticipativen Zinseszinsen getilgt werden. Wie lautet der Tilgungsplan?

---

*) Die Capitalamortisationsquote am Schlusse des ersten Jahres per 9349·72 wurde nach der Formel berechnet, die übrigen daraus durch fortgesetzte Division mit $w = 0{\cdot}95$ abgeleitet, x_n ergibt sich dann zu 41382·39 statt zu 41382·23. Die anticipativen Zinsen wurden gebildet durch die Differenz zwischen Annuität und der berechneten Capitalamortisationsquote. Sie betragen am Beginne des 30. Jahres 2068·96, während sie aus der Schuld am Anfang des 30. Jahres infolge der verschiedenen Rechnungsart sich zu $\frac{41381{\cdot}55 \times 5}{100} = 2069{\cdot}08$ ergeben.

Die Zeit innerhalb welcher das Capital sammt Zinseszins amortisiert sein wird, ergibt sich bei Aufstellung des Tilgungsplanes, sie kann direct ermittelt werden aus

$$A = \frac{C(w-1)}{w^n - 1}$$

denn

$$A\,w^n - A = C(w-1)$$

$$A\,w^n = C(w-1) + A$$

$$w^n = \frac{C(w-1) + A}{A}$$

Im gewählten Beispiele ist $0{\cdot}95^n = \frac{380564{\cdot}65 - 275000}{380564{\cdot}65}$

$$= 0{\cdot}2773896$$

$$n \,.\, \log 0{\cdot}95 = \log 0{\cdot}2773896$$

$$n = \frac{0{\cdot}4430902 - 1}{0{\cdot}9777236 - 1}$$

$$= \frac{0{\cdot}5569098}{0{\cdot}0222764}$$

$$n = 25 \text{ Jahre.}$$

74. Man prüfe die Richtigkeit des in Nr. 72 entwickelten Tilgungsplanes für das 16. Jahr.

Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mortalitätstafeln.

Gewisse Aufgaben der politischen Arithmetik, jene aus dem Gebiete der Lebensversicherung, können nur unter Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelöst werden. Wenn von Wahrscheinlichkeit gesprochen wird, so bezieht sich diese Wahrscheinlichkeit immer auf eine bestimmte Thatsache, die man im Auge hat, z. B. auf das Eintreffen irgendeines bestimmten Ereignisses. Ob nun dieses Ereignis wirklich eintreffen wird oder nicht, hängt von verschiedenen Umständen ab, es wird unter allen möglichen Fällen solche geben, welche dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind, und solche, die das Eintreffen des Ereignisses unmöglich

machen. Offenbar wird die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses umso größer werden, je mehr Fälle dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind, umso geringer, je mehr Fälle überhaupt möglich sind. Daher können wir die Wahrscheinlichkeit mathematisch darstellen durch ein Verhältnis zweier Zahlen

$$w_1 = \frac{g}{m}$$

wobei g die dem Ereignis günstigen, m die überhaupt möglichen Fälle bedeutet. Diese Wahrscheinlichkeit w_1 bezeichnen wir als die einfache Wahrscheinlichkeit. Würde man fragen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass das Ereignis nicht eintrifft, so wäre dies der früheren Annahme gerade entgegengesetzt; man nennt diese Wahrscheinlichkeit die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit und findet sie durch folgende Überlegung: Sind von m möglichen Fällen g Fälle dem Eintreffen günstig, dann sind $(m - g)$ Fälle dem Eintreffen ungünstig oder dem Nichteintreffen günstig, daher ist

$$w_2 = \frac{m - g}{m}.$$

Bildet man die Summe beider Wahrscheinlichkeiten, so hat man

$$w_1 + w_2 = \frac{g}{m} + \frac{m - g}{m}$$

$$w_1 + w_2 = 1.$$

Wenn $w_1 = \frac{g}{m}$ so wird w_1 offenbar umso größer, je größer g wird; erreicht g seinen größten Wert m (mehr Fälle, als möglich sind, kann es nicht geben), dann wird $w_1 = 1$, dann wird aber auch das Ereignis gewiss eintreffen. 1 ist daher das Symbol der Gewissheit. Die Summe $w_1 + w_2$ muss gleich 1 sein, denn das Ereignis wird entweder eintreffen oder nicht, ein Drittes ist nicht möglich.

Ist in irgendeinem Beispiele die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, dann ist die einfache und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit gleich groß und $\frac{1}{2}$ das Symbol der Unentschiedenheit.

Betrachtet man zwei Ereignisse, sie seien E_1 und E_2 genannt und bezeichnet man von den möglichen Fällen m jene, die dem Eintreffen von E_1 günstig sind, mit g_1 jene, die dem Eintreffen von E_2 günstig sind, mit g_2, dann hat man die einfachen Wahrscheinlichkeiten für jedes Ereignis:

$$w_1 = \frac{g_1}{m}, \qquad w_2 = \frac{g_2}{m}.$$

Man kann nun bezüglich beider Ereignisse fragen, wie groß die Wahrscheinlichkeit sei:

1. Dass überhaupt eines der beiden Ereignisse eintrete,
2. dass eines früher als das andere eintrete (relative Wahrscheinlichkeit),
3. dass beide gleichzeitig eintreffen (zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit).

Zu 1.: Von m möglichen Fällen sind $g_1 + g_2$ Fälle günstig für das Eintreffen von E_1 oder E_2, somit die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w = \frac{g_1 + g_2}{m} = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m}$$

$$w = w_1 + w_2.$$

Zu 2.: Soll die Wahrscheinlichkeit gefunden werden, dass E_1 früher als E_2 eintrete, so sind von $g_1 + g_2$ Fällen, die für das Eintreffen von E_1 oder E_2 gleich möglich sind, g_1 Fälle für das Eintreffen von E_1 günstig. Die Wahrscheinlichkeit, dass E_1 früher eintrete als E_2, ist

$$w = \frac{g_1}{g_1 + g_2}$$

dividiert man Zähler und Nenner des Bruches durch m, dann ist

$$w = \frac{\frac{g_1}{m}}{\frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m}}$$

$$w = \frac{w_1}{w_1 + w_2}$$

ebenso dass E_2 früher eintrifft als E_1 $w' = \dfrac{w_2}{w_1 + w_2}$.

Zu 3.: Die Anzahl der möglichen Fälle ist hier $m \times m$, denn es kann jeder für E_1 mögliche Fall m mit jedem für E_2 möglichen Fall m zusammentreffen.

Ebenso muss, damit die Ereignisse E_1 und E_2 zusammen eintreffen, jeder für E_1 günstige Fall g_1 mit jedem für E_2 günstigen Falle g_2 zusammentreffen; die Wahrscheinlichkeit ist dann:

$$w = \frac{g_1 \times g_2}{m \times m} = w_1 \,.\, w_2.$$

Ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses w, und ist an das Eintreffen des Ereignisses die Ausbezahlung einer bestimmten Geldsumme S geknüpft, so nennt man das Product $w.\ S$ die mathematische Hoffnung. Die Bedeutung dieses Wertes ist leicht einzusehen. Soll eine bestimmte Summe S an eine Person ausbezahlt werden, wenn diese z. B. das 60. Lebensjahr erreicht, so hat diese Summe für die betreffende Person nicht den Wert S, sondern einen geringeren Wert, sie würde den Wert S haben, wenn es sicher wäre, dass die Person 60 Jahre alt werden würde. Der Wert wird also jedenfalls vom Eintreffen des Ereignisses (Erreichen des 60. Jahres) abhängen und da das Eintreffen des Ereignisses durch die Wahrscheinlichkeit bestimmt wird, von der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses. Bei den Aufgaben über die Berechnung der Lebensrenten wird hievon Gebrauch gemacht werden.

Die Aufgaben aus dem Gebiete der Lebensversicherung können nur mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung unter Anwendung sogenannter Mortalitätstafeln gelöst werden. Die Mortalitätstafeln sind aus statistischen Aufzeichnungen über die menschliche Lebensdauer abgeleitet. Derartige Tafeln beginnen mit einer bestimmten Anzahl gleichzeitig geborener Personen nnd verzeichnen jedes Jahr die Anzahl der von diesen Personen noch lebenden. Die hier abgedruckte Tafel von Florencourt beginnt mit 10.000 gleichzeitig geborenen Personen.

Mortalitätstafel nach Florencourt.

Alter in Jahren *n*	Anzahl d. in diesem Alter lebenden Personen *L*	*n*	*L*	*n*	*L*
0	10000	33	4844	66	2559
1	7450	34	4792	67	2448
2	7088	35	4740	68	2336
3	6823	36	4688	69	2223
4	6618	37	4637	70	2109
5	6468	38	4587	71	1993
6	6345	39	4538	72	1874
7	6243	40	4490	73	1749
8	6154	41	4441	74	1616
9	6073	42	4392	75	1479
10	6004	43	4342	76	1337
11	5946	44	4291	77	1198
12	5897	45	4239	78	1064
13	5854	46	4186	79	936
14	5815	47	4132	80	812
15	5778	48	4077	81	697
16	5740	49	4021	82	590
17	5699	50	3964	83	492
18	5655	51	3905	84	404
19	5608	52	3843	85	327
20	5558	53	3777	86	261
21	5506	54	3707	87	206
22	5453	55	3631	88	159
23	5399	56	3550	89	117
24	5344	57	3465	90	80
25	5288	58	3377	91	50
26	5231	59	3286	92	28
27	5173	60	3191	93	14
28	5116	61	3092	94	6
29	5060	62	2990	95	3
30	5005	63	2885	96	1
31	4951	64	2778	97	0
32	4897	65	2669		

Es sind viele derartige Mortalitätstafeln construiert worden, so z. B. die Mortalitätstafel von Brune-Fischer, welche sowohl für Männer als auch für Frauen getrennt aufgestellt wurde, sie beginnt mit 100.000 im Alter von 25 Jahren stehenden Männern oder mit 100.000 im Alter von 18 Jahren stehenden Frauen. Die Mortalitätstafel der 17 englischen Gesellschaften, welche vielen Versicherungsgesellschaften als Grundlage ihrer Berechnungen dient, beginnt mit 100.000 im Alter von 10 Jahren stehenden Personen. Einige dieser Tafeln sind im II. Theile des

Buches enthalten. Ihre Einrichtung und ihr Gebrauch wird später erklärt werden.

Mit Hilfe dieser Mortalitätstafeln sind wir imstande, eine Reihe von Fragen zu lösen, vor allem dienen sie uns zur Feststellung der Wahrscheinlichkeit, ob eine Person ein bestimmtes Alter erleben wird oder nicht. Betrachten wir die Mortalitätstafel von Florencourt, so sehen wir, dass von 10.000 gleichzeitig geborenen Personen sich die Zahl der Lebenden jedes Jahr verringert, so dass von diesen Personen nur 812 das achtzigste Lebensjahr erreichen. Möglicherweise könnten alle 10.000 Personen 80 Jahre alt werden, aber statistisch festgestellt ist, dass nach 80 Jahren nur mehr 812 Personen am Leben sind. Wir bezeichnen diese 812 Fälle als die dem Eintreffen des Ereignisses (Erreichen eines Alters von 80 Jahren) günstigen Fälle.

Die Wahrscheinlichkeit für das Erreichen des Alters von 80 Jahren ist demnach

$$w = \frac{812}{10000} = 0{\cdot}08120.$$

Die folgenden Beispiele sollen den Gebrauch der Mortalitätstafel verständlich machen:

75. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine im Alter von 20 Jahren stehende Person 60 Jahre alt wird?

Wir finden in der Mortalitätstafel bei $n = 20$ unter L die Zahl 5558, d. h. von 10.000 gleichzeitig geborenen Personen erreichen 5558 das Alter von 20 Jahren. Diese können möglicherweise alle 60 Jahre alt werden. Die Zahl $L_{20} = 5558$ stellt uns die möglichen Fälle vor.

L_{60} finden wir aus der Tafel zu 3191, diese Zahl bedeutet die für das Eintreffen des Ereignisses günstigen Fälle. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit

$$w = \frac{L_{60}}{L_{20}} = \frac{3191}{5558} = 0{\cdot}57413.$$

76. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine im Alter von 20 Jahren stehende Person das Alter von 60 Jahren nicht erreicht?

Wir finden nach Seite 53, dass die entgegengesetzte Wahr-

scheinlichkeit sich mit der einfachen Wahrscheinlichkeit zu 1 ergänzt, daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w = 1 - 0{\cdot}57413$$
$$w = 0{\cdot}42587$$

77. Von zwei Personen ist die eine 30, die andere 50 Jahre alt; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass:

a) beide nach 25 Jahren noch leben?

b) dass die dreißigjährige Person noch lebt, die andere inzwischen gestorben ist?

c) dass beide nach 25 Jahren gestorben sind?

(Benützung der Florencourt'schen Tafel.)

78. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine dreißigjährige Person während ihres 45. Jahres stirbt? (Florencourt.)

79. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von einem Ehepaare, dessen Mann 40, die Frau 33 Jahre alt ist:

a) nach 15 Jahren beide gestorben sind?

b) nach 10 Jahren der Mann Witwer ist?

c) nach 30 Jahren beide noch leben?

(Mortalitätstafel von Brune - Fischer.)

Lebensrenten.

Man versteht unter einer Lebensrente oder Leibrente einen jährlichen Geldbetrag, der einer Person während der ganzen Dauer ihres Lebens ausbezahlt wird. Im allgemeinen gelten auch hier die bei den Zeitrenten entwickelten Betrachtungen; auch hier kann das Recht auf den Bezug einer solchen Rente durch die einmalige Zahlung eines Geldbetrages, einer Mise, oder aber durch Theilzahlungen, Prämien erworben werden, und das Verfahren der Berechnung ist ein ähnliches wie bei den Zeitrenten.

Eine im Alter von a Jahren stehende Person zahlt an eine Versicherungsgesellschaft einen Geldbetrag M (Mise) und tritt dadurch in den Bezug einer lebenslänglichen Rente r, deren Auszahlung am Schlusse jedes Jahres erfolgen soll (p% decursive

Verzinsung); wie groß wird die Mise dieser Rente sein müssen? Wir verfahren hier genau so wie bei der Berechnung der Zeitrenten und nehmen als Grundlage unserer Berechnung an, dass der Wert der Mise gleich sein müsse der Leistung der Versicherungsgesellschaft, wenn wir beide Werte auf denselben Zeitpunkt beziehen.*) Der Einfachheit halber wählen wir den Tag, an welchem das Geschäft (der Vertrag mit der Versicherungsgesellschaft) zustande kommt, zum Zeitpunkt, auf welchen wir die Werte beziehen.

Der Wert der Einzahlung ist dann M, die von der Versicherungsgesellschaft zu leistenden Werte sind folgende:

Die Gesellschaft zahlt am Ende des ersten Jahres die Rente r; diese wird der a Jahre alten Person ausgefolgt, im Falle sie dann noch lebt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Person noch lebt, d. h. dass sie $a + 1$ Jahre alt wird, finden wir aus der Mortalitätstafel zu $\frac{L_{a+1}}{L_a}$ und die Rente r wird für diese Person am Ende des ersten Jahres den Wert $\frac{L_{a+1}}{L_a} \cdot r$ haben, vgl. Seite 55. Beziehen wir diesen Wert auf den Tag der Einlage, so haben wir ihn ein volles Jahr zurückzubeziehen, also noch durch $v = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ zu dividieren.

Demnach ist $\frac{L_{a+1}}{L_a} \cdot \frac{r}{v}$ der Wert der ersten Rente
ebenso finden wir $\frac{L_{a+2}}{L_a} \cdot \frac{r}{v^2}$ den Wert der zweiten Rente
ferner $\frac{L_{a+3}}{L_a} \cdot \frac{r}{v^3}$ den Wert der dritten Rente
⋮
und $\frac{L_{a+n}}{L_a} \cdot \frac{r}{v^n}$ den Wert der letzten Rente

} bezogen auf den Tag der Einlage

*) Hiebei ziehen wir nicht in Betracht, dass die Versicherungsgesellschaft für Regie u. s. w. einen gewissen Geldbetrag anrechnen wird.

Die Summe aller dieser Werte muss der Einlage gleich sein. Wir können dies auch in der Art ausdrücken, dass wir sagen: Die auf den Tag der Einlage zurückgeführten mathematischen Hoffnungswerte des Versicherten müssen der Einlage gleich sein.

$$M = \frac{L_{a+1}}{L_a} \cdot \frac{r}{v} + \frac{L_{a+2}}{L_a} \cdot \frac{r}{v^2} + \frac{L_{a+3}}{L_a} \cdot \frac{r}{v^3} + \cdots\cdots + \frac{L_{a+n}}{L_a} \cdot \frac{r}{v^n}.$$

Es fragt sich nun, wie groß n hier ist. Dies ist durch die angewendete Mortalitätstafel bedingt. Die Rentenzahlung wird fortgesetzt, so lange noch die Person lebt. Wir schreiben also:

$$M = \frac{L_{a+1}}{L_a} \cdot \frac{r}{v} + \frac{L_{a+2}}{L_a} \cdot \frac{r}{v^2} + \frac{L_{a+3}}{L_a} \cdot \frac{r}{v^3} + \cdots\cdots \text{ bis ans}$$

Ende der Mortalitätstafel

$$L_a \cdot M = r\left(\frac{L_{a+1}}{v} + \frac{L_{a+2}}{v^2} + \frac{L_{a+3}}{v^3} + \cdots\cdots\right)$$

dividiert man die Gleichung durch v^a, so entsteht

$$\frac{L_a}{v^a} \cdot M = r\left(\frac{L_{a+1}}{v^{a+1}} + \frac{L_{a+2}}{v^{a+2}} + \frac{L_{a+3}}{v^{a+3}} + \cdots\cdots\right)$$

wir erhalten hier eine Reihe von Brüchen der allgemeinen Form $\frac{L_a}{v^a}$. Der Zähler stellt die Zahl der im Alter von a Jahren lebenden Personen vor, durch den Nenner v^a wird von dieser Zahl gewissermaßen ein Barwert gebildet, sie wird discontiert, man nennt Brüche von dieser Form daher auch die „discontierten Zahlen der Lebenden", wir bezeichnen sie kurz mit D_a. Aus unserer Gleichung wird:

$$D_a \cdot M = r\,(D_{a+1} + D_{a+2} + D_{a+3} + \cdots\cdots)$$

Die zur Berechnung der Renten dienenden Mortalitätstafeln enthalten diese Brüche D_a bereits fertig ausgerechnet in einer eigenen Columne, natürlich muss dann ein bestimmter Aufzinsungsfactor v angenommen werden, denn für jeden Wert von v (p) würden auch die Brüche D_a einen anderen Wert annehmen.

Um die Gleichung

$$M \,.\, D_a = r\,(D_{a+1} + D_{a+2} + D_{a+3} + \ldots\ldots)$$

zu vereinfachen, wäre noch die Summe des in der Klammer stehenden Ausdruckes zu bilden, wir bezeichnen sie mit S, und da das erste Glied den Zeiger $_{a+1}$ besitzt, mit S_{a+1}; auch diese Summen sind fertig gerechnet in den Mortalitätstafeln enthalten in einer eigenen Columne mit der Überschrift S. Solche Mortalitätstafeln, die für einen bestimmten Procentsatz diese Brüche und Summen ausgerechnet enthalten, dienen uns als Grundlage für die nun folgenden Berechnungen, wir nennen sie „Grundrechnungen“ oder „Grundtafeln“. Solche Grundrechnungen für $3^1/_2$ und $4^0/_0$ finden sich für verschiedene Mortalitätstafeln im II. Theile des Buches.

Die Gleichung wird nun:

$$M D_a = r \,.\, S_{a+1}$$

daraus ist $$M = r \,.\, \frac{S_{a+1}}{D_a}$$

80. Ein 28jähriger Mann wünscht eine am Schlusse jedes Jahres fällige Leibrente von 500 Kronen zu beziehen; welche Summe hat er auf einmal bei der Versicherungsgesellschaft zu erlegen, um nach Verlauf eines Jahres in den Bezug der Rente zu treten? Die Versicherungsgesellschaft legt der Berechnung eine $4^0/_0$ige Verzinsung zugrunde.

$$M = ?$$
$$r = 500 \qquad\qquad M = \frac{r \,.\, S_{a+1}}{D_a}$$
$$S_{a+1} = S_{29} = 29168{\cdot}98$$
$$D_a = D_{28} = 1706{\cdot}07 \qquad\qquad M = 8548{\cdot}60 \text{ Kronen.}$$

Dabei wurde die für $4^0/_0$ geltende Florencourt'sche Grundrechnung benützt.

Wählt man statt dessen die Grundrechnung zu $4^0/_0$ nach der Mortalitätstafel von Brune-Fischer für Männer, dann wird

$$S_{a+1} = S_{29} = 558452{\cdot}007$$
$$D_a = D_{28} = 32708{\cdot}137$$
$$\text{und } M = 8536{\cdot}90 \text{ Kronen.}$$

Man erhält bei Anwendung verschiedener Grundrechnungen

verschiedene Werte und hat sich für eine bestimmte Grundrechnung zu entscheiden. Die meisten Versicherungsgesellschaften berechnen ihre Renten nach der Mortalitätstafel der „17 englischen Gesellschaften“ unter Annahme einer 4- oder 3- und $3^1/_2{}^0/_0$igen Verzinsung, letztere entspricht mehr den gegenwärtigen Verhältnissen und wird von den Versicherungsgesellschaften bei der Rentenversicherung viel häufiger angenommen, als die Verzinsung zu $4^0/_0$. Man berechnet eine Verzinsung zu $4^0/_0$ noch bei den in einem späteren Capitel durchgeführten Capitalsversicherungen. Die Mortalitätstafel der „17 englischen Gesellschaften“ hat den Nachtheil, dass sie erst mit den 10jährigen Personen beginnt, somit für Versicherungen bei Kindern unter 10 Jahren nicht benützbar ist, sie wurde deshalb von Professor Heym ergänzt und abgeändert, so dass sie mit 144218 im Alter von 0 Jahren stehenden Kindern beginnt. Vom 15. Jahre ab lauten dann beide Tafeln gleich.*)

81. Eine 45jährige Person will durch einen einmal zu entrichtenden Geldbetrag eine Leibrente von 850 Kronen erwerben; wie groß wird derselbe sein müssen, wenn die Versicherungsgesellschaft zur Berechnung der Renten die Grundrechnung zu $3^1/_2{}^0/_0$ der „17 englischen Gesellschaften“ mit der Abänderung von Heym verwendet?**)

$M = ?$
$r = 850$

$$M = r \cdot \frac{S_{a+1}}{D_a}$$

*) Die Mortalitätstafel der 17 englischen Gesellschaften, welche noch von vielen Gesellschaften als Grundlage ihrer Berechnungen angenommen wird, entspricht wenig der Wirklichkeit, wie man sich neuerer Zeit überzeugt hat. Von den nach der Sterblichkeitstafel zu erwartenden Todesfällen der Rentner traten thatsächlich stets weit weniger ein, so dass den Versicherungsgesellschaften bei der Lebensversicherung ein beträchtlicher Nachtheil erwuchs. Man sucht deshalb diese Mortalitätstafel durch die in neuerer Zeit gesammelten Sterblichkeitserfahrungen zu ersetzen. Eine derartige neuere Tafel ist zum Beispiel die deutsche Rentnersterbetafel, sie beruht auf dem bis zum 31. December 1889 reichenden Beobachtungsmaterial von 24 deutschen, 11 österreichischen und 3 schweizerischen Versicherungsgesellschaften (vgl. II. Theil des Buches).

**) Diese Grundtafel sei in der Folge der Kürze halber mit „G“ (Gesellschaften) bezeichnet.

$$S_{a+1} = S_{46} = 232042{\cdot}1 \qquad = \frac{850 \,.\, 232042{\cdot}1}{15829{\cdot}37}$$
$$D_a = D_{45} = 15829{\cdot}37$$
$$M = 12460{\cdot}12 \text{ Kronen.}$$

82. Welche jährliche Rente wird eine 32jährige Person beziehen können, wenn sie eine Mise von 15000 Kronen an eine Versicherungsgesellschaft zahlt? Grundrechnung G zu $3^1/_2{}^0/_0$.

$$M = r \,.\, \frac{S_{a+1}}{D_a}$$

$$\text{daraus } r = M \,.\, \frac{D_a}{S_{a+1}}$$
$$M = 15000$$
$$r = ?$$
$$D_a = D_{32} = 28214{\cdot}02$$
$$S_{a+1} = S_{33} = 505379{\cdot}8$$
$$r = 837{\cdot}41 \text{ Kronen.}$$

83. Eine 30 Jahre alte Person wünscht durch Einzahlung einer Mise von 10.000 Kronen an eine Versicherungsgesellschaft eine Lebensrente zu erhalten; wie groß wird dieselbe sein können? Grundrechnung G zu $3^1/_2{}^0/_0$.

84. Jemand wünscht eine jährliche Leibrente von 500 Kronen von einer Versicherungsgesellschaft zu beziehen, welchen Betrag hat er hiefür ein- für allemal zu entrichten, wenn er im Alter von 25 Jahren steht und die Gesellschaft die Grundrechnung G zu $3^1/_2{}^0/_0$ benützt?

Wenn jemand an eine Versicherungsgesellschaft einen Geldbetrag (Mise) entrichtet, so verpflichtet sich die Versicherungsgesellschaft, ihm hiefür jährliche Geldbeträge (Renten) auszufolgen. Es ist dies ein Vertrag, der zwischen dem sich Versichernden und der Gesellschaft abgeschlossen wurde. Der Versicherte erhält die „Versicherungspolizze“ ausgefolgt, wodurch sich die Gesellschaft zur Zahlung der Renten verpflichtet sieht. Die Zahlung der Renten erfolgt vom Capital, welches der Versicherte eingezahlt hat. Dieses Capital, welches die Versicherungsgesellschaft dem Einzahlenden verzinsen muss, dient der Gesellschaft als „Reserve“ zur Zahlung der Renten. Alle der Gesellschaft eingezahlten Reserven werden in ihrer Jahresbilanz als Reserve zur Deckung der auszubezahlenden Geldbeträge an-

geführt. Wenn ein solcher Vertrag zwischen Versicherten und Versicherungsgesellschaft in Kraft getreten ist und die Gesellschaft bereits durch einige Jahre ihrer Verpflichtung, die Renten zu zahlen, nachgekommen ist, dann wird die ihr zur Verfügung stehende Reserve durch die bereits erfolgten Zahlungen geringer geworden sein. Der Wert der Reserve unterliegt daher mit den fortlaufenden Jahren einer fortschreitenden Verringerung. Es liegt sowohl im Interesse des Versicherten, als auch im Interesse der Gesellschaft, diesen Wert der Versicherungsreserve (der Versicherungspolizze) oder die sogenannte „Prämienreserve“ *) für einen beliebigen Zeitpunkt genau feststellen zu können.

Die Berechnung der Prämienreserve für die eingezahlte Mise gelingt an der Hand folgender Überlegung:

Es sei M die Mise, welche von einer a Jahre alten Person an die Versicherungsgesellschaft gezahlt wurde und r die Rente, welche von der Gesellschaft jährlich am Schlusse eines Jahres gezahlt wird und es sei die Reserve nach m Jahren zu bestimmen. Die Gesellschaft hat während dieser m Jahre jährlich die Rente r ausbezahlt (vorausgesetzt, dass der Versicherte noch lebte). Die erste Rente hatte für den Versicherten den Wert $r \cdot \frac{L_{a+1}}{L_a}$, die zweite $r \frac{L_{a+2}}{L_a}$, die dritte $r \frac{L_{a+3}}{L_a}$ und jene, welche am Schlusse des m^{ten} Jahres zur Auszahlung gelangt $r \cdot \frac{L_{a+m}}{L_a}$.

Bezieht man diese Werte auf den Tag der Abschließung des Versicherungsvertrages, dann ist:

$$\frac{r}{v} \cdot \frac{L_{a+1}}{L_a} + \frac{r}{v^2} \cdot \frac{L_{a+2}}{L_a} + \frac{r}{v^3} \cdot \frac{L_{a+3}}{L_a} + \dots\dots \frac{r}{v^m} \cdot \frac{L_{a+m}}{L_a}$$

die Summe aller von der Gesellschaft geleisteten Zahlungen, welche sie durch die eingezahlte Mise deckt. Der Betrag, der von der Mise noch übrig bleibt, ist die Reserve, bezogen auf den Zeitpunkt der Abschließung des Versicherungsvertrages. Bezeichnet

*) Die Reserve dient der Gesellschaft zur Auszahlung jährlicher Theilzahlungen. Solche Theilzahlungen heißen auch „Prämien“, vgl. Seite 58. Hier sollte es eigentlich richtiger heißen „Rentenreserve“, jedoch ist der Name „Prämienreserve“ eingeführt und gebräuchlich.

man die Reserve mit R, so ist ihr Wert an die Bedingung geknüpft, dass der Versicherte das Alter von $a + m$ Jahren erreiche, denn sonst stellt die Gesellschaft die Zahlungen ein und eine Reserve ist nicht mehr vorhanden. Der Wert der Reserve ist $R \cdot \frac{L_{a+m}}{L_a}$ und auf dieselbe Zeit bezogen wie die übrigen Beträge $\frac{R}{v^m} \cdot \frac{L_{a+m}}{L_a}$.

Man findet nun R aus der Gleichung:

$$\frac{R}{v^m} \cdot \frac{L_{a+m}}{L_a} = M - \frac{r}{L_a}\left(\frac{L_{a+1}}{v} + \frac{L_{a+2}}{v^2} + \frac{L_{a+3}}{v^3} + \ldots\ldots \ldots\ldots + \frac{L_{a+m}}{v^m}\right)$$

dividiert man die Gleichung durch v^a, so entsteht:

$$\frac{R}{v^{a+m}} \cdot \frac{L_{a+m}}{L_a} = \frac{M}{v^a} - \frac{r}{L_a}\left(\frac{L_{a+1}}{v^{a+1}} + \frac{L_{a+2}}{v^{a+2}} + \frac{L_{a+3}}{v^{a+3}} + \ldots \ldots\ldots + \frac{L_{a+m}}{v^{a+m}}\right)$$

durch multiplicieren mit L_a erhält man:

$$R \cdot \frac{L_{a+m}}{v^{a+m}} = M \cdot \frac{L_a}{v^a} - r\left(\frac{L_{a+1}}{v^{a+1}} + \frac{L_{a+2}}{v^{a+2}} + \frac{L_{a+3}}{v^{a+3}} + \ldots \ldots\ldots + \frac{L_{a+m}}{v^{a+m}}\right)$$

oder:

$$R \cdot D_{a+m} = M \cdot D_a - r\,(D_{a+1} + D_{a+2} + D_{a+3} + \ldots\ldots \ldots\ldots + D_{a+m}).$$

Der Ausdruck in der Klammer ist nun zu vereinfachen. Er stellt eine Summe vor. Diese Summe wäre S_{a+1}, wenn sie bis ans Ende der Mortalitätstafel fortgesetzt würde, da aber das letzte Glied D_{a+m} ist, fehlen noch alle Glieder von D_{a+m+1} angefangen, es fehlt noch S_{a+m+1}. Der Ausdruck in der Klammer lässt sich somit als Differenz zweier Summen auffassen, er wird $(S_{a+1} - S_{a+m+1})$ und die Gleichung lautet nun:

$$R \cdot D_{a+m} = M \cdot D_a - r\,(S_{a+1} - S_{a+m+1})$$

$$R\, D_{a+m} = M \cdot D_a - r \cdot S_{a+1} + r \cdot S_{a+m+1}$$

früher wurde (vergl. Seite 61) für M gefunden: $M = \frac{r \,.\, S_{a+1}}{D_a}$.
Setzt man diesen Wert in die Gleichung statt M, dann ist:

$$R \,.\, D_{a+m} = r \,.\, S_{a+m+1}$$

daraus ist $\quad R = r \,.\, \frac{S_{a+m+1}}{D_{a+m}}$ die gesuchte Reserve.

85. Eine im Alter von 32 Jahren stehende Person wünscht durch eine Zahlung von 18.500 Kronen an eine Versicherungsgesellschaft in den Bezug einer decursiven Leibrente zu treten; in welcher Höhe wird dieselbe von der Gesellschaft gewährt werden können, und wie groß ist die Reserve nach 20 Jahren? Grundrechnung G zu $3^1/_2\,^0/_0$.

Zur Lösung der Aufgabe dienen die Formeln:

$M = 18.500$

$r = ?$

$R = ?$

$$r = \frac{M \,.\, D_a}{S_{a+1}} \text{ und } R = r \,.\, \frac{S_{a+m+1}}{D_{a+m}}$$

$D_a = D_{32} = 28214{\cdot}02$

$D_{a+m} = D_{52} = 11241{\cdot}29$

$S_{a+1} = S_{33} = 505379{\cdot}8$

$S_{a+m+1} = S_{53} = 140188{\cdot}9$

Man findet

$r = 1032{\cdot}80$ Kronen,

$R = 12880{\cdot}\text{--}$ Kronen.

86. Eine im Alter von 40 Jahren stehende Person wünscht sich auf eine Leibrente von 1000 Kronen zu versichern. Welchen Betrag hat sie an die Versicherungsgesellschaft auf einmal zu entrichten, und wie groß ist der Wert der Versicherungspolizze nach 25 Jahren? Grundrechnung G zu $3^1/_2\,^0/_0$.

87. Eine 25-jährige Person bezieht seit ihrem 20. Lebensjahr eine Leibrente von 800 Kronen; welchen Betrag musste sie hiefür der Versicherungsgesellschaft zahlen, und wie groß ist gegenwärtig der Wert ihrer Einzahlung? Grundrechnung G zu $3^1/_2\,^0/_0$ nach Brune-Fischer für Männer.

Die Zahlung der Renten seitens der Versicherungsgesellschaft muss nicht nach Jahresfrist, vom Tag der Einzahlung des Versicherten an gerechnet, erfolgen, sondern der Versicherte kann auch den Bezug der Rente auf eine spätere Zeit verschieben. Man bezeichnet eine derartige Versicherung als „aufgeschobene Leibrente“. Die Mise einer solchen aufgeschobenen Leibrente findet man wie folgt:

Es sei a das Alter der sich versichernden Person, welche erst im Alter von $a + n$ Jahren die Rente r beziehen will.

Bezieht man die Geldbeträge auf den Tag der Einzahlung der Mise, dann ist die Leistung der Gesellschaft am Ende des $(a + n)^{\text{ten}}$ Jahres nach der Einzahlung $r \cdot \frac{L_{a+n}}{L_a}$ und für den gewählten Zeitpunkt $\frac{r}{v^n} \cdot \frac{L_{a+n}}{L_a}$. Ebenso findet man für die folgenden Jahre die Rentenwerte:

$$\frac{r}{v^{n+1}} \cdot \frac{L_{a+n+1}}{L_a}, \quad \frac{r}{v^{n+1}} \cdot \frac{L_{a+n+2}}{L_a} \quad \text{u. s. f.}$$

Die Mise findet man aus der Gleichung:

$$M = \frac{r}{v^n} \cdot \frac{L_{a+n}}{L_a} + \frac{r}{v^{n+1}} \cdot \frac{L_{a+n+1}}{L_a} + \frac{r}{v^{n+2}} \cdot \frac{L_{a+n+2}}{L_a} +$$

$$+ \ldots\ldots \text{ bis ans Ende der Mortalitätstafel;}$$

$$M = \frac{r}{L_a}\left(\frac{L_{a+n}}{v^n} + \frac{L_{a+n+1}}{v^{n+1}} + \frac{L_{a+n+2}}{v^{n+2}} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

nach Division durch v^a entsteht:

$$\frac{M}{v^a} = \frac{r}{L_a}\left(\frac{L_{a+n}}{v^{a+n}} + \frac{L_{a+n+1}}{v^{a+n+1}} + \frac{L_{a+n+2}}{v^{a+n+2}} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$M = \frac{r}{D_a}\left(D_{a+n} + D_{a+n+1} + D_{a+n+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

$$M = \frac{r}{D_a} \cdot S_{a+n}.$$

88. Eine 35-jährige Person zahlte am 1. Jänner 1900 an eine Versicherungsgesellschaft den Betrag von 9520 Kronen; welche Rente wird sie lebenslänglich beziehen können, wenn sie die erste Rente zu Ende des Jahres 1915 beansprucht? Grundrechnung G zu $3^1/_2{}^0/_0$. [1444·50 Kronen.]

89. Eine gegenwärtig 42 Jahre alte Person wünscht nach 12 Jahren in den Bezug einer jährlichen Leibrente von 1000 Kronen zu treten; welchen Betrag hat sie an eine Versicherungsgesellschaft jetzt zu zahlen? Grundrechnung G zu $3^1/_2{}^0/_0$. [7133·13 Kronen.]

So wie bei den Zeitrenten, die in einem früheren Capitel

erklärt wurden, ist auch hier das Recht auf den Bezug einer Rente durch jährliche Theilzahlungen oder „Prämien“ zu erwerben. Der Wert einer Prämie, wodurch man sich die Rente erwirbt, ist nach dem folgenden Verfahren festzustellen: Jemand zahle an eine Versicherungsgesellschaft jährlich eine gleichbleibende Prämie P, er sei a Jahre alt und die Zahlung der Prämie erfolge durch n Jahre am Anfange eines jeden Jahres. Nach erfolgter Einzahlung der Prämien zahlt die Versicherungsgesellschaft am Schlusse jedes Jahres eine Rente r aus, deren erste zu Ende des n^{ten} Jahres ausbezahlt wird. Um den Wert der Prämie zu finden, geht man, wie in allen bisher betrachteten Fällen, wieder von der Erwägung aus, dass die Leistung des Versicherten der Leistung der Gesellschaft gleich sein müsse. Natürlich müssen alle Geldbeträge auf dieselbe Zeit bezogen werden, um miteinander verglichen werden zu können. Es soll beispielsweise das Ende des n^{ten} Jahres gewählt werden, also jene Zeit, in der die Auszahlung der ersten Rente erfolgt. Die Prämienzahlungen des Versicherten besitzen dann folgende Werte:

Zu Beginn des ersten Jahres wird die Prämie P gezahlt, diese hat nach n Jahren den Wert $P \, . \, v^n$ erreicht, die zweite Prämie wird ein Jahr später gezahlt, vorausgesetzt, dass die Person noch lebt. (Stirbt sie, bevor die Prämienzahlungen beendet sind, dann verfallen die eingezahlten Beträge zu Gunsten der Gesellschaft.) Der Wert der zweiten Prämie ist somit $P \frac{L_{a+1}}{L_a} \, .$ $. \, v^{n-1}$, ebenso der dritten: $P \, . \, \frac{L_{a+2}}{L_a} v^{n-2}$ u. s. f. Der Vollständigkeit halber schreibe man den Wert der ersten Prämie statt $P \, v^n$ nun $P \frac{L_a}{L_a} \, . \, v^n$ und erhält dann als Summe aller Prämienzahlungen:

$$\left(P \frac{L_a}{L_a} v^n + P \, . \, \frac{L_{a+1}}{L_a} \, . \, v^{n-1} + P \frac{L_{a+2}}{L_a} v^{n-3} + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. \ldots\ldots + P \frac{L_{a+n-1}}{L_a} v \right)$$

Dieser Ausdruck entspricht der Leistung des Versicherten. Die Versicherungsgesellschaft zahlt zu Ende des n^{ten} Jahres die Rente r, im Falle der Versicherte dann noch lebt, der Wert dieser

Rente ist demnach $r\frac{L_{a+n}}{L_a}$. Setzt man dieses Verfahren fort, dann erhält man als Leistung der Versicherungsgesellschaft:

$$\left(r\frac{L_{a+n}}{L_a} + \frac{r}{v}\cdot\frac{L_{a+n+1}}{L_a} + \frac{r}{v^2}\frac{L_{a+n+2}}{L_a} + \ldots\ldots\ldots \text{ bis ans Ende der Mortalitätstafel.}\right)$$

Beide Ausdrücke müssen einander gleich sein.

$$P\frac{L_a}{L_a}\cdot v^n + P\frac{L_{a+1}}{L_a}v^{n-1} + P\frac{L_{a+2}}{L_a}v^{n-2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + P\frac{L_{a+n-1}}{L_a}v = r\frac{L_{a+n}}{L_a} + \frac{r}{v}\cdot\frac{L_{a+n+1}}{L_a} + \ldots\ldots$$

$$P(L_a\cdot v^n + L_{a+1}v^{n-1} + L_{a+2}v^{n-2} + \ldots + L_{a+n-1}v) =$$

$$= r\left(L_{a+n} + \frac{L_{a+n+1}}{v} + \frac{L_{a+n+2}}{v^2} + \ldots\ldots\right)$$

dividiert man die Gleichung durch $v^a\cdot v^n = v^{a+n}$ dann entsteht:

$$P\left(\frac{L_a}{v^a} + \frac{L_{a+1}}{v^{a+1}} + \frac{L_{a+2}}{v^{a+2}} + \ldots\ldots + \frac{L_{a+n-1}}{v^{a+n-1}}\right) =$$

$$= r\left(\frac{L_{a+n}}{v^{a+n}} + \frac{L_{a+n+1}}{v^{a+n+1}} + \frac{L_{a+n+2}}{v^{a+n+2}} + \ldots\ldots\right)$$

$$P(D_a + D_{a+1} + D_{a+2} + \ldots\ldots + D_{a+n-1}) =$$

$$= r(D_{a+n} + D_{a+n+1} + D_{a+n+2} + \ldots\ldots)$$

$$P(S_a - S_{a+n}) = r\cdot S_{a+n}$$

$$P = \frac{r\cdot S_{a+n}}{S_a - S_{a+n}}.$$

90. Jemand wünscht durch eine jährlich zu Anfang jedes Jahres erfolgende Prämienzahlung eine decursive Leibrente von 2000 Kronen zu erwerben, er zahlt die erste Prämie im Alter von 26 Jahren stehend zu Anfang des Jahres 1903 und von da an jedes Jahr bis zu Beginn des Jahres 1928, zu dessen Ende er die 1. Rente bereits beziehen will. Wie groß wird die jährliche Prämienzahlung sein müssen, wenn die Versicherungsgesellschaft die Prämien mit $3^1/_2{}^0/_0$ verzinst und die Grundrechnung G zur Berechnung benützt?

Hier ist $P = ?$
$r = 2000$

$$P = \frac{r\cdot S_{a+n}}{S_a - S_{a+n}}$$

$$\frac{S_{a+n} = S_{51} = 163264\cdot9}{S_a = S_{26} = 730734\cdot1} = \frac{326529800}{567469\cdot2}$$

$$P = 575\cdot41 \text{ Kronen.}$$

91. Eine im Alter von 26 Jahren stehende Person zahlt durch 25 Jahre zu Beginn jedes Jahres an eine Versicherungsgesellschaft eine Prämie von 575·41 Kronen; welche decursive Leibrente wird sie nach beendeter Prämienzahlung von der Versicherungsgesellschaft beziehen können? Grundrechnung G zu $3^1/_2{}^0/_0$.

$$\text{Aus } P = \frac{r\, S_{a+n}}{S_a - S_{a+n}} \text{ ist } r = \frac{P\,(S_a - S_{a+n})}{S_{a+n}}.$$

Soll hier der Wert der „Prämienreserve" nach einer Reihe von Jahren, z. B. nach m Jahren bestimmt werden, dann ergeben sich verschiedene Werte für dieselbe, je nach der Zeit, für welche die Reserve zu bestimmen ist. Es können hiebei drei Fälle eintreten: I. $m < n$ d. h. Die Reserve wird zu einer Zeit bestimmt, wo die Prämienzahlungen noch andauern, eine Rente noch nicht ausbezahlt wurde, II. $m = n$, die Reserve wird unmittelbar nach erfolgter Prämienzahlung gesucht, III. $m > n$ es soll der Wert der Reserve festgestellt werden zu einer Zeit, wo die Rentenzahlungen bereits erfolgten. In allen Fällen findet man den Wert der Prämienreserve bei Einzahlung von Prämien wie im früher entwickelten Beispiele dadurch, dass man die Leistung des Versicherten und der Versicherungsgesellschaft auf einen bestimmten Termin bezieht und die Differenz beider Wert bildet. Wählt man dazu den Termin, für welchen die Prämienreserve bestimmt werden soll, dann ergeben sich die folgenden Ableitungen:

I. $[m < n]$.

P sei die durch n Jahre einzuzahlende Prämie, der Vesicherte wäre gegenwärtig a Jahre alt und die Reserve soll zu Ende des m^{ten} Jahres bestimmt werden.

$$P \cdot \frac{L_a}{L_a} \cdot v^m\,{}^{*)} + P \frac{L_{a+1}}{L_a} \cdot v^{m-1} + P \cdot \frac{L_{a+2}}{L_a} \cdot v^{m-2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + P \cdot \frac{L_{a+m-1}}{L_a} \cdot v = R \cdot \frac{L_{a+m}}{L_a},$$

dividiert man die Gleichung durch $v^a \cdot v^m = v^{a+m}$, dann entsteht

$$P.\left[\frac{L_a}{v^a}+\frac{L_{a+1}}{v^{a+1}}+\frac{L_{a+2}}{v^{a+2}}+\ldots+\frac{L_{a+m-1}}{v^{a+m-1}}\right]=R\,\frac{L_{a+m}}{v^{a+m}}$$

$$P\,[D_a+D_{a+1}+D_{a+2}+\ldots\ldots+D_{a+m-1}]=R\,D_{a+m}$$

$$P\,[S_a-S_{a+m}]=R\,D_{a+m}$$

$$R=P\,\frac{S_a-S_{a+n}}{D_{a+m}}.$$

II. $[m = n]$.

Die Leistung des Versicherten ist dieselbe wie früher, nur ist $m = n$ zu setzen, somit

$$R=P\,\frac{S_a-S_{a+n}}{D_{a+n}},$$

oder die Formel I. gilt auch für den Fall II.

III. $[m > n]$.

Die Prämienzahlungen sind beendet, ihr Wert bezogen auf den Schluss des m^{ten} Jahres ist:

$$P\,\frac{L_a}{L_a}{}^{*)}\,v^m+P\,\frac{L_{a+1}}{L_a}\,v^{m-1}+P\,\frac{L_{a+2}}{L_a}.v^{m-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\,P\,\frac{L_{a+n-1}}{L_a}\,v^{m-n+1}{}^{**)}$$

$$\frac{P}{L_a}\Big[L_a\,.\,v^m+L_{a+1}\,.\,v^{m-1}+L_{a+2}\,.\,v^{m-2}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\,L_{a+n-1}\,.\,v^{m-n+1}\Big].$$

Zu derselben Zeit hat die Versicherungsgesellschaft schon Renten ausbezahlt und ist deren Wert:

$$r\,.\,\frac{L_{a+n}}{L_a}\,.\,v^{m-n}+r\,\frac{L_{a+n+1}}{L_a}\,.\,v^{m-n-1}+r\,\frac{L_{a+n+2}}{L_a}\,.\,v^{m-n-2}+\ldots$$
$$\ldots\ldots+r\,.\,\frac{L_{a+m-1}}{L_a}\,.\,v$$

oder $\frac{r}{L_a}\Big[L_{a+n}\,.\,v^{m-n}+L_{a+n+1}\,v^{m-n-1}+L_{a+n+2}\,v^{m-n-2}+\ldots$

$$\ldots\ldots+L_{a+m-1}\,v\Big].$$

---

*) Vergl. Seite 68.

**) Warum v^{m-n+1}?

Die Differenz beider Werte bildet die gesuchte Reserve

$$R \,.\, \frac{L_{a+m}}{L_a}.$$

Es besteht somit die Gleichung:

$$R \,.\, L_{a+m} = P\,[L_a \,.\, v^m + L_{a+1}\,v^{m-1} + \ldots + L_{a+n-1}\,v^{m-n+1}] -$$
$$- r\,[L_{a+n}\,v^{m-n} + L_{a+n+1}\,v^{m-n-1} + \ldots\ldots + L_{a+m-1}\,.\,v].$$

Dividiert man die Gleichung durch $v^a \,.\, v^m = v^{a+m}$, so erhält man:

$$R\,\frac{L_{a+m}}{v^{a+m}} = P\left[\frac{L_a}{v^a} + \frac{L_{a+1}}{v^{a+1}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{L_{a+n-1}}{v^{a+n-1}}\right] -$$
$$- r\left[\frac{L_{a+n}}{v^{a+n}} + \frac{L_{a+n+1}}{v^{a+n+1}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{L_{a+m-1}}{v^{a+m-1}}\right]$$

$$R\,D_{a+m} = P\,[D_a + D_{a+1} + \ldots\ldots\ldots + D_{a+n-1}] -$$
$$- r\,[D_{a+n} + D_{a+n+1} + \ldots\ldots\ldots + D_{a+m-1}]$$
$$R\,D_{a+m} = P\,[S_a - S_{a+n}] - r\,[S_{a+n} - S_{a+m}].$$

In diese Gleichung kann zur Vereinfachung der Seite 69 für P gefundene Wert eingesetzt werden.

$$P = \frac{r \,.\, S_{a+n}}{S_a - S_{a+n}}; \text{ dann entsteht:}$$

$$\mathrm{R} \,.\, D_{a+m} = r\,S_{a+n} - r\,S_{a+n} + r\,S_{a+m}; \text{ daraus ist}$$

$$R = r \,.\, \frac{S_{a+m}}{D_{a+m}}.$$

92. Eine im Alter von 30 Jahren stehende Person will durch 20 Jahre zu Anfang jedes Jahres eine Prämie von 625 Kronen an eine Versicherungsgesellschaft einzahlen, um nach Beendigung der Prämienzahlungen eine decursive Leibrente beziehen zu können. Wie groß wird dieselbe sein und welchen Wert hat die Versicherungspolizze nach 12, 20 und 45 Jahren? Grundrechnung zu $3^1/_2\,\%$ nach Brune-Fischers Mortalitätstafel ür Frauen.

Man findet den Wert der Rente aus

$$P = \frac{r\,S_{a+n}}{S_a - S_{a+n}}; \qquad r = \frac{P\,(S_a - S_{a+n})}{S_{a+n}}$$

wobei: $P = 625$ $\quad r = \frac{625\,[577269{\cdot}93 - 170532{\cdot}38]}{170532{\cdot}38}$

$a = 30$

$n = 20$ $\quad r = 1490{\cdot}69$ Kronen.

Der Wert der Versicherungspolizze nach 12 Jahren ist:

$$R = P\,\frac{S_a - S_{a+m}}{D_{a+m}} \quad \text{wobei } m = 12$$

$$R = \frac{625\,[577269{\cdot}93 - 290051{\cdot}25]}{17493{\cdot}866}$$

$$R = 10261{\cdot}40 \text{ Kronen,}$$

nach 20 Jahren ist die Versicherungspolizze wert:

$$R = \frac{625\,[577269{\cdot}93 - 170532{\cdot}38]}{11994{\cdot}965}$$

$$R = 21193{\cdot}14 \text{ Kronen.}$$

Die Versicherungspolizze hat zu Ende des 20. Jahres ihren größten Wert erreicht, von dieser Zeit an nimmt ihr Wert stetig ab und beträgt nach 45 Jahren nur mehr:

$$R = r\,\frac{S_{a+m}}{D_{a+m}}$$

$$R = 1490{\cdot}69\,\frac{10135{\cdot}240}{1721{\cdot}4012}$$

$$R = 8776{\cdot}84 \text{ Kronen.}$$

93. Eine im Alter von 35 Jahren stehende Person zahlte durch 12 Jahre zu Anfang jedes Jahres eine bestimmte Prämie an eine Versicherungsgesellschaft und bezog nach beendeter Prämienzahlung eine decursive Leibrente von 800 Kronen; welche Prämie musste jährlich eingezahlt werden und wie groß ist die Prämienreserve, wenn die Person das Alter von 75 Jahren erreicht hat? Grundrechnung G zu $3^1/_2{}^0/_0$.

Anwartschaften.

Will jemand sich in der Art versichern, dass nach seinem Ableben an die Erben ein bestimmtes Capital zur Auszahlung gelange, dann bezeichnet man diese Art der Versicherung als Anwartschaft. Das Recht auf eine derartige Anwartschaft kann erworben werden sowohl durch einmalige Zahlung, als auch durch Prämienzahlung. Zunächst soll der erste Fall betrachtet werden. Man findet den Barwert einer Anwartschaft oder jenen Geldbetrag, den jemand an eine Versicherungsgesellschaft zu zahlen hat, um den Erben ein Capital zu sichern, nach folgender Überlegung: Ist a das Alter der Person in Jahren, W der Barwert der Anwartschaft, C das Capital, welches den Erben ausbezahlt wird, dann muss die vom Versicherten gezahlte Geldsumme der Leistung der Gesellschaft gleichkommen, wenn man beide auf denselben Termin bezieht. Nimmt man als Termin die Zeit an, zu welcher der Versicherungsvertrag abgeschlossen wurde, so ist die Leistung des sich Versichernden W. Die Leistung der Gesellschaft ist abhängig von dem Ableben des Versicherten. Stirbt der Versicherte im ersten Jahre, dann erfolgt die Auszahlung des Capitals C an die Erben. Der Geldbetrag C ist somit an die Wahrscheinlichkeit für das Sterben der Person geknüpft, die mathematische Hoffnung am Ende des ersten Jahres ist $C w_1$, wobei w_1 die Wahrscheinlichkeit für das Sterben bedeutet. Von den L_a möglichen Fällen sind dem Eintreffen des Ereignisses (Tod des Versicherten) nach der Mortalitätstafel $(L_a - L_{a+1})$ Fälle günstig. Am Ende des ersten Jahres erhält man dann als Leistung der Gesellschaft:

$$\frac{L_a - L_{a+1}}{L_a} \cdot C,$$

welcher Betrag noch auf den Tag des Versicherungsvertrages zu beziehen, daher noch durch v zu dividieren ist. Auf gleiche Weise findet man die Werte für die folgenden Jahre und es entsteht die Gleichung:

$$W = \frac{C}{v} \cdot \frac{L_a - L_{a+1}}{L_a} + \frac{C}{v^2} \cdot \frac{L_{a+1} - L_{a+2}}{L_a} +$$

$$+ \frac{C}{v^3} \cdot \frac{L_{a+2} - L_{a+3}}{L_a} \ldots\ldots \text{ bis ans Ende der Mortalitätstafel}$$

$$L_a \cdot W = \frac{C \cdot L_a}{v} - \frac{C L_{a+1}}{v} + \frac{C \cdot L_{a+1}}{v^2} - \frac{C \cdot L_{a+2}}{v^2} +$$

$$+ \frac{C \cdot L_{a+2}}{v^3} - \frac{C \cdot L_{a+3}}{v^3} + \ldots\ldots$$

$$L_a \cdot W = \frac{C}{v}\left(L_a + \frac{L_{a+1}}{v} + \frac{L_{a+2}}{v^2} + \ldots\ldots\right) -$$

$$- C\left(\frac{L_{a+1}}{v} + \frac{L_{a+2}}{v^2} + \frac{L_{a+3}}{v^3} + \ldots\ldots\right)$$

dividiert man die Gleichung durch v^a dann erhält man

$$\frac{L_a}{v^a} W = \frac{C}{v}\left(\frac{L_a}{v^a} + \frac{L_{a+1}}{v^{a+1}} + \frac{L_{a+2}}{v^{a+2}} + \ldots\ldots\right) -$$

$$- C\left(\frac{L_{a+1}}{v^{a+1}} + \frac{L_{a+2}}{v^{a+2}} + \frac{L_{a+3}}{v^{a+3}} + \ldots\ldots\right)$$

$$D_a W = \frac{C}{v}\left(D_a + D_{a+1} + D_{a+2} + \ldots\ldots\ldots\right) -$$

$$- C\left(D_{a+1} + D_{a+2} + D_{a+3} + \ldots\ldots\right)$$

$$D_a W = \frac{C}{v} S_a - C \cdot S_{a+1}$$

$$W = \frac{C\,[S_a - v\,S_{a+1}]}{v \cdot D_a}$$

93. Eine im Alter von 38 Jahren stehende Person will im Falle des Ablebens den Erben ein Capital von 25.000 Kronen sichern; welchen Betrag hat sie der Versicherungsgesellschaft zu bezahlen? Grundrechnung zu $3^1/_2{}^0/_0$ nach Brune-Fischer für Männer

$C = 25000$

$a = 38$

$v = 1{\cdot}035$

$$W = \frac{25000\,[412281{\cdot}09 - 1{\cdot}035 \,.\, 387902{\cdot}92]}{1{\cdot}035 \,.\, 24378{\cdot}172}$$

$$= \frac{270039250}{25231{\cdot}408}$$

$$= 10702{\cdot}50 \text{ Kronen.}$$

Bei Abschluss des Versicherungsvertrages verlangt die

Gesellschaft den Nachweis des Alters, sowie ein ärztliches Gutachten über den Gesundheitszustand des Versicherungsnehmers, sie kann auch bei der Capitalsversicherung Probejahre bedingen, um eine Garantie zu besitzen, dass die Capitalsversicherung nicht zu ihrem Nachtheil abgeschlossen wird. Stirbt der Versicherte innerhalb der bedungenen Probejahre, dann verfällt die eingezahlte Summe der Gesellschaft, ohne dass diese den Erben gegenüber eine Verpflichtung hätte. Sind n Probejahre bedungen, dann beginnt das erste Probejahr ein Jahr nach Abschluss des Vertrages, die Gesellschaft hat nach Ablauf der Probejahre, wenn der Versicherte dann stirbt

$$C \cdot \frac{L_{a+n} - L_{a+n+1}}{L_a}$$

an die Erben auszuzahlen. Der Versicherte ist zu Beginn des n^{ten} Probejahres L_{a+n} Jahre alt, bis zu Ende des Probejahres sterben $L_{a+n} - L_{a+n+1}$ Personen.

Den Wert der Anwartschaft bei Probejahren findet man dann aus der Gleichung

$$W = \frac{C}{v^{n+1}} \cdot \frac{L_{a+n} - L_{a+n+1}}{L_a} + \frac{C}{v^{n+2}} \cdot \frac{L_{a+n+1} - L_{a+n+2}}{L_a} + \ldots\ldots$$

welche nun wie oben zu vereinfachen ist.

95. Welchen Wert erhält man im vorigen Beispiele, wenn 3 Probejahre bedungen werden?

96. Welches Capital kann eine 40jährige Person ihren Erben sichern, wenn sie an eine Versicherungsgesellschaft 15.000 Kronen entrichtet. Grundrechnung G zu $3^1/_2{}^0/_0$.

Soll eine Anwartschaft durch Prämienzahlungen erworben werden, dann ist die Leistung des Versicherten bezogen auf den Tag des Abschlusses des Versicherungsvertrages:

$$P \cdot \frac{L_a}{L_a} + \frac{P}{v} \cdot \frac{L_{a+1}}{L_a} + \frac{P}{v^2} \cdot \frac{L_{a+2}}{L_a} + \ldots\ldots$$

wobei P die eingezahlte Prämie bedeutet.

Die Leistung der Gesellschaft ist:

$$\frac{C}{v} \cdot \frac{L_a - L_{a+1}}{L_a} + \frac{C}{v^2} \cdot \frac{L_{a+1} - L_{a+2}}{L_a} + \frac{C}{v^3} \cdot \frac{L_{a+2} - L_{a+3}}{L_a} + \ldots$$

P findet man aus der Gleichung:

$$P\left(L_a + \frac{1}{v} \cdot L_{a+1} + \frac{1}{v^2} \cdot L_{a+2} + \ldots\ldots\right) =$$

$$= \frac{C}{v}\left(L_a + \frac{L_{a+1}}{v} + \frac{L_{a+2}}{v^2} + \ldots\right) - C\left(\frac{L_{a+1}}{v} + \right.$$

$$\left. + \frac{L_{a+2}}{v^2} + \ldots\ldots\right);$$

dividiert man die Gleichung durch v^a dann entsteht:

$$P\left(\frac{L_a}{v^a} + \frac{L_{a+1}}{v^{a+1}} + \frac{L_{a+2}}{v^{a+2}} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{C}{v}\left(\frac{L_a}{v^a} + \frac{L_{a+1}}{v^{a+1}} + \frac{L_{a+2}}{v^{a+2}} + \ldots\right) - C\left(\frac{L_{a+1}}{v^{a+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{L_{a+2}}{v^{a+2}} + \frac{L_{a+3}}{v^{a+3}} + \ldots\right)$$

$$P S_a = \frac{C}{v} \cdot S_a - C \cdot S_a + 1$$

$$P = \frac{C\,(S_a - v\,S_{a+1})}{v \cdot S_a}$$

97. Welche Prämie hat eine 37jährige Person jährlich zu Anfang jedes Jahres an eine Versicherungsgesellschaft zu entrichten, um ihren Erben ein Capital von 20.000 Kronen zu sichern? Grundrechnung zu 4% nach Florencourt. [438 Kronen.]

98. Jemand zahlt, im Alter von 28 Jahren stehend, an eine Versicherungsgesellschaft eine jährliche Prämie von 500 Kronen; welches Capital wird er im Falle seines Todes den Erben hinterlassen können? Grundrechnung zu $3^1/_2$% nach Brune-Fischer für Männer. [27.967 Kronen.]

Die Prämienzahlungen des Versicherten dauern in dem oben angenommenen Falle bis zu dessen Tode, die Versicherung kann aber auch derart abgeschlossen werden, dass der Versicherte die Prämie nur durch eine bestimmte Anzahl von Jahren einzuzahlen wünscht. Ist *n* die Anzahl der Jahre innerhalb welcher